Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Testul 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați modulul celui de-al cincilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1=-1$ și $b_2=3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x^2+7x+9$. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $f(x)>0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x-1)=\log_3(6-x)-2$.

5p **4.** Determinați numărul natural n, $n\geq 2$, pentru care $C_n^{n-2}-A_n^1=5$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(3,-1)$, numărul real m și dreapta d de ecuație $y=(m-1)x-2m$. Determinați numărul real m pentru care distanța de la punctul A la dreapta d este egală cu 0.

5p **6.** Determinați $\cos(\pi-2x)$, știind că x este număr real și $\cos x=\frac{2}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & -a & 1\\ 2 & a & -1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}3x+y-z=1\\ x-ay+z=3\\ 2x+ay-z=2\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=-3$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care matricea $B(a)=A(a)\cdot A(a)$ are două elemente egale cu 0.

5p **c)** Pentru $a=1$, arătați că sistemul de ecuații nu are soluții.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-xy$.

5p **a)** Arătați că $(-3)*3=9$.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $2^x*4^{x-1}=\frac{1}{4}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=-1+\frac{3}{x}-\frac{4\sqrt{x}}{x^2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 4}\frac{4^x\cdot f'(x)}{x-4}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2xe^x-2x+1}{x}$.

5p **a)** Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\ln x+2e^x-2x+2021$ este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e f(x)\,dx=2e^e-4e+3$.

5p **c)** Calculați $\int_1^2 x f(x)\,dx$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ este $q=-3$	**2p**
	$b_5=b_1q^4=(-1)(-3)^4=-81$, deci $\lvert b_5\rvert=81$	**3p**
2.	$-2x^2+7x+9>0 \Leftrightarrow (2x-9)(x+1)<0$	**2p**
	$x\in\left(-1,\frac{9}{2}\right)$	**3p**
3.	$\log_3\frac{x-1}{6-x}=-2 \Rightarrow \frac{x-1}{6-x}=\frac{1}{9}$	**3p**
	$x=\frac{3}{2}$, care convine	**2p**
4.	$\frac{n(n-1)}{2}-n=5 \Leftrightarrow n^2-3n-10=0$	**3p**
	Cum n este număr natural, $n\geq 2$, obținem $n=5$	**2p**
5.	Distanța de la punctul A la dreapta d este egală cu $0 \Rightarrow A\in d$	**2p**
	$-1=(m-1)\cdot 3-2m \Leftrightarrow m=2$	**3p**
6.	$\cos(\pi-2x)=-\cos 2x=1-2\cos^2 x=1-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=$	**3p**
	$=1-2\cdot\frac{4}{9}=\frac{1}{9}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&-2&1\\2&2&-1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2))=\begin{vmatrix}3&1&-1\\1&-2&1\\2&2&-1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=6-2+2-4+1-6=-3$	**3p**
b)	$B(a)=A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}8&3-2a&-1\\5-a&a^2+a+1&-2-a\\4+a&-a^2-a+2&-1+a\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**2p**
	Matricea $B(a)$ are două elemente egale cu 0 dacă $a=-2$ sau $a=1$	**3p**
c)	Pentru $a=1$, sistemul devine $\begin{cases}3x+y-z=1\\x-y+z=3\\2x+y-z=2\end{cases}$ și adunând primele două ecuații ale sistemului obținem $3x+y-z+x-y+z=4$, deci $x=1$	**3p**
	Adunând a doua și a treia ecuație din sistem, obținem $x-y+z+2x+y-z=5 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$, deci sistemul nu are soluții	**2p**

2.a)	$(-3)*3=\frac{1}{2}\cdot(-3)+\frac{1}{2}\cdot 3-(-3)\cdot 3=$	**3p**
	$=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+9=9$	**2p**
b)	$x*y=\frac{1}{4}-xy+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}=$	**2p**
	$=\frac{1}{4}-x\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$\frac{1}{4}-\left(2^x-\frac{1}{2}\right)\left(4^{x-1}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 2^x=\frac{1}{2}$ sau $4^{x-1}=\frac{1}{2}$	**3p**
	$x=-1$ sau $x=\frac{1}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(-1+3x^{-1}-4x^{-\frac{3}{2}}\right)'=3\cdot(-1)x^{-2}-4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}}=$	**3p**
	$=-\frac{3}{x^2}+\frac{6}{x^2\sqrt{x}}=\frac{-3x+6\sqrt{x}}{x^3}=\frac{3\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{4\sqrt{x}}{x^2}\right)=-1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=-1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to4}\frac{4^x\cdot f'(x)}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}\frac{4^x\cdot3\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)}{x^3(x-4)}=\lim\limits_{x\to4}\frac{4^x\cdot3\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)}{x^3\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to4}\frac{-4^x\cdot3\sqrt{x}}{x^3\left(\sqrt{x}+2\right)}=-6$	**2p**
2.a)	$F'(x)=\left(\ln x+2e^x-2x+2021\right)'=\frac{1}{x}+2e^x-2=$	**3p**
	$=\frac{1+2xe^x-2x}{x}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	**2p**
b)	$\int_1^e f(x)\,dx=F(x)\Big\vert_1^e=F(e)-F(1)=$	**3p**
	$=2e^e-4e+3$	**2p**
c)	$\int_1^2 x f(x)\,dx=\int_1^2\left(2xe^x-2x+1\right)dx=\left((2x-2)e^x-x^2+x\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=2e^2-4+2=2e^2-2$	**2p**