

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Testul 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați suma primilor șapte termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_1 = -5$ și rația $r = 8$.
- 5p** 2. Determinați valorile reale nenule ale lui a pentru care ecuația $ax^2 - x - a - 1 = 0$ are două soluții distincte în mulțimea numerelor reale.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3x - \sqrt[3]{x^3 + x^2 - 9} = 2x$.
- 5p** 4. Calculați $5A_3^2 - 3C_5^3$.
- 5p** 5. Se consideră vectorii $\vec{a} = 2\vec{i} + m\vec{j}$ și $\vec{b} = 5\vec{i} - (m^2 + 1)\vec{j}$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m pentru care vectorii \vec{a} și \vec{b} sunt coliniari.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB > BC$, $AC = 6$, $BC = 10$ și aria egală cu 15. Determinați măsura unghiului C .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(a, b) = aI_2 + bA$, unde a și b sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că $\det A = 0$.
- 5p** b) Demonstrați că $M(a, b) \cdot M(x, y) = M(ax, ay + bx)$, pentru orice numere reale a, b, x și y .
- 5p** c) Arătați că, dacă x și y sunt numere reale pentru care matricele $B = M(x, 2y) + M(y, 2x)$ și $C = M(x\sqrt{2}, 1) \cdot M(y\sqrt{2}, 1)$ sunt egale, atunci $x^2 + y^2 = 0$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x * y = xy + 2x + 2y + 2$ și $x \circ y = x + y + 2$.
- 5p** a) Arătați că $(1 * 2) \circ (1 * 3) = 1 * (2 \circ 3)$.
- 5p** b) Demonstrați că $x * e = e$, pentru orice număr real x , unde e este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”.
- 5p** c) Determinați numărul natural n pentru care $n * (-n) \geq n \circ (-n)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}, & x \in (-\infty, 0) \\ x \ln(x + 1) & , \quad x \in [0, +\infty) \end{cases}$.
- 5p** a) Arătați că funcția f este continuă pe \mathbb{R} .
- 5p** b) Demonstrați că funcția f este convexă pe $(0, +\infty)$.
- 5p** c) Arătați că, pentru orice număr real a , $a < 0$, tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ nu este paralelă cu axa Ox .
2. Se consideră funcțiile $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$ și $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1 + x\sqrt{x}}{x^2}$.
- 5p** a) Demonstrați că funcția f este o primitivă a funcției g .

5p b) Calculați $\int_{\frac{1}{4}}^4 g(x) dx$.

5p c) Determinați numărul real m , $m \in (0,1)$, pentru care $\int_m^1 f^2(x) g(x) dx = \frac{1}{3}$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = \frac{(2a_1 + 6r) \cdot 7}{2} = \frac{(2 \cdot (-5) + 6 \cdot 8) \cdot 7}{2} =$ $= 133$	3p 2p
2.	$\Delta = 1 - 4a(-a - 1) = (2a + 1)^2$ $\Delta > 0 \Rightarrow a \neq -\frac{1}{2} \text{ și, cum } a \text{ este număr real nenul, obținem } a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$	2p 3p
3.	$\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 9} = x \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0$ $x = -3 \text{ sau } x = 3$	3p 2p
4.	$5A_3^2 - 3C_5^3 = 5 \cdot \frac{3!}{(3-2)!} - 3 \cdot \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} =$ $= 5 \cdot 6 - 3 \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} = 30 - 30 = 0$	2p 3p
5.	$\frac{2}{5} = \frac{m}{-m^2 - 1} \Leftrightarrow 2m^2 + 5m + 2 = 0$ $m = -2 \text{ sau } m = -\frac{1}{2}$	3p 2p
6.	$A_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin C}{2} \Rightarrow 15 = \frac{6 \cdot 10 \cdot \sin C}{2} \Rightarrow \sin C = \frac{1}{2}$ Cum $AB > BC > AC$, unghiul C are măsura cea mai mare dintre unghiurile ΔABC , deci unghiul C are măsura de 150°	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1 =$ $= -1 + 1 = 0$	3p 2p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$ $M(a, b) \cdot M(x, y) = (aI_2 + bA)(xI_2 + yA) = axI_2 + ayA + bxA + ybA \cdot A = axI_2 + (ay + bx)A =$ $= M(ax, ay + bx)$, pentru orice numere reale a, b, x și y	2p 3p
c)	$B = xI_2 + 2yA + yI_2 + 2xA = M(x + y, 2(x + y))$, pentru orice numere reale x și y Cum $C = M(2xy, \sqrt{2}(x + y))$, obținem că $x + y = 2xy = 0$, deci $x = y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$	2p 3p
2.a)	$(1 * 2) \circ (1 * 3) = (2 + 2 + 4 + 2) \circ (3 + 2 + 6 + 2) = 10 \circ 13 = 10 + 13 + 2 = 25$ $1 * (2 \circ 3) = 1 * (2 + 3 + 2) = 1 * 7 = 7 + 2 + 14 + 2 = 25$, deci $(1 * 2) \circ (1 * 3) = 1 * (2 \circ 3)$	3p 2p

b)	$x \circ (-2) = (-2) \circ x = x$, pentru orice număr real x , deci $e = -2$	2p
	$x * e = x * (-2) = -2x + 2x + (-4) + 2 = -2 = e$, pentru orice număr real x	3p
c)	$n * (-n) = 2 - n^2$, $n \circ (-n) = 2$, pentru orice număr natural n	2p
	$2 - n^2 \geq 2 \Leftrightarrow n^2 \leq 0$, deci $n = 0$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (x - 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}) = 0$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x \ln(x+1)) = 0$ și $f(0) = 0$, deci	3p
	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, de unde obținem că f este continuă în $x = 0$ Cum f este continuă pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, +\infty)$, obținem că f este continuă pe \mathbb{R}	2p
b)	Pentru orice $x \in (0, +\infty)$, $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$ și $f''(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$	3p
	$f''(x) > 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția f este convexă pe $(0, +\infty)$	2p
c)	Dacă $a \in (-\infty, 0)$, atunci panta tangentei la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ este	2p
	$f'(a) = 1 + \frac{2a-1}{2\sqrt{a^2-a+1}}$ Cum $f'(a) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2-a+1} = 1-2a \Leftrightarrow 4a^2-4a+4 = 4a^2-4a+1$, ceea ce este imposibil, obținem că, pentru orice număr real a , $a < 0$, tangenta la graficul funcției f în punctul A nu este paralelă cu axa Ox	3p
2.a)	$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$	3p
	$= \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} = \frac{x\sqrt{x}+1}{x^2} = g(x)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția f este o primitivă a funcției g	2p
b)	$\int_{\frac{1}{4}}^4 g(x) dx = f(x) \Big _{\frac{1}{4}}^4 = f(4) - f\left(\frac{1}{4}\right) =$	3p
	$= \frac{15}{4} + 3 = \frac{27}{4}$	2p
c)	$\int_m^1 f^2(x) \cdot g(x) dx = \int_m^1 f^2(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{3} f^3(x) \Big _m^1 = \frac{1}{3} (f^3(1) - f^3(m))$	3p
	Cum $f(1) = 1$, obținem $f(m) = 0$, deci $m = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, care convine	2p