Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Testul 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că $\left(2-\lg 40\right)\cdot\dfrac{1}{\lg^2 5-\lg^2 2}=1$.

5p **2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care soluția ecuației $2x-m^2+1=0$ este număr real strict mai mic decât 0.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x^2+x}=4^{2x}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $(n+1)!-n!\leq n+2$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-6,6)$ și $B(0,2)$. Determinați coordonatele punctului C, știind că $\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{BC}$.

5p **6**. Determinați numerele reale a, $a>-2$, știind că a^2+1 și $a+2$ sunt lungimile ipotenuzei, respectiv razei cercului circumscris unui triunghi dreptunghic.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \sqrt{a}\\ 1 & 0 & 1\\ a & 1 & 1\end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(4)\right)=1$.

5p **b)** Demonstrați că $\det\left(A(a)\cdot A(1)-A(a+1)\right)>0$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Arătați că matricea $B(n)=A\left(1^2\right)+A\left(2^2\right)+A\left(3^2\right)+\ldots+A\left(n^2\right)$ este inversabilă, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\sqrt{3}(xy+4)-3(x+y)$.

5p **a)** Arătați că $\sqrt{3}\circ 2=\sqrt{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=\sqrt{3}\left(x-\sqrt{3}\right)\left(y-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $3^{1}\circ 3^{\frac{1}{2}}\circ 3^{\frac{1}{3}}\circ\ldots\circ 3^{\frac{1}{2021}}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-\operatorname{arctg}x, & x\in(-\infty,0)\\ \dfrac{5x}{x^2+x+4}, & x\in[0,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Arătaţi că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $(-\infty,0)$.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\leq 1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^5 x(x+2)f(x)\,dx=16$.

5p **b)** Calculați $\int_1^3 f(x)\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că orice primitivă F a funcției f este concavă.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\lg 100-\lg 40\right)\cdot\dfrac{1}{\left(\lg 5-\lg 2\right)\left(\lg 5+\lg 2\right)}=$	**2p**
	$=\lg\dfrac{100}{40}\cdot\dfrac{1}{\lg\dfrac{5}{2}\cdot\lg 10}=\lg\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{\lg\dfrac{5}{2}}=1$	**3p**
2.	$2x=m^2-1\Leftrightarrow x=\dfrac{m^2-1}{2}$	**2p**
	Soluția ecuației este un număr real strict mai mic decât $0\Leftrightarrow m^2-1<0$, deci $m\in\left(-1,1\right)$	**3p**
3.	$2^{x^2+x}=2^{4x}\Leftrightarrow x^2+x=4x\Leftrightarrow x^2-3x=0$	**3p**
	$x=0$ sau $x=3$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele n din mulțimea numerelor naturale de o cifră care verifică inegalitatea $\left(n+1\right)!-n!\le n+2$ sunt 0, 1 și 2, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{3}{10}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AO}=6\vec{i}-6\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC}=x_C\vec{i}+\left(y_C-2\right)\vec{j}$, deci $6\vec{i}-6\vec{j}=2x_C\vec{i}+2\left(y_C-2\right)\vec{j}$	**3p**
	Coordonatele punctului C sunt $x_C=3$, $y_C=-1$	**2p**
6.	Triunghiul este dreptunghic, deci $a^2+1=2\left(a+2\right)$, de unde obținem $a^2-2a-3=0$	**3p**
	$a=-1$ sau $a=3$, care convin	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A\left(4\right)=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&0&1\\4&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A\left(4\right)\right)=\begin{vmatrix}1&0&2\\1&0&1\\4&1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+2+0-0-1-0=1$	**3p**
b)	$A\left(a\right)\cdot A\left(1\right)-A\left(a+1\right)=\begin{pmatrix}1+\sqrt{a}&\sqrt{a}&1+\sqrt{a}\\2&1&2\\a+2&1&a+2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&\sqrt{a+1}\\1&0&1\\a+1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{a}&\sqrt{a}&1+\sqrt{a}-\sqrt{a+1}\\1&1&1\\1&0&a+1\end{pmatrix}$, pentru orice $a\in\left(0,+\infty\right)$	**3p**
	$\det\left(A\left(a\right)\cdot A\left(1\right)-A\left(a+1\right)\right)=\begin{vmatrix}\sqrt{a}&\sqrt{a}&1+\sqrt{a}-\sqrt{a+1}\\1&1&1\\1&0&a+1\end{vmatrix}=\sqrt{a+1}-1>0$, pentru orice $a\in\left(0,+\infty\right)$	**2p**

c)	$B(n)=\begin{pmatrix} 1+1+\ldots+1 & 0 & 1+2+\ldots+n \\ 1+1+\ldots+1 & 0 & 1+1+\ldots+1 \\ 1^2+2^2+\ldots+n^2 & 1+1+\ldots+1 & 1+1+\ldots+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n & 0 & \frac{n(n+1)}{2} \\ n & 0 & n \\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & n & n \end{pmatrix}$, pentru orice număr natural n	**2p**
	Pentru orice număr natural n, $n\ge 2$, $\det(B(n))=\frac{n^3(n-1)}{2}\ne 0$, deci matricea $B(n)$ este inversabilă, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$	**3p**
2.a)	$\sqrt{3}\circ 2=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\cdot 2+4\right)-3\left(\sqrt{3}+2\right)=$	**2p**
	$=6+4\sqrt{3}-3\sqrt{3}-6=\sqrt{3}$	**3p**
b)	$x\circ y=\sqrt{3}xy-3x-3y+4\sqrt{3}=\sqrt{3}xy-3x-3y+3\sqrt{3}+\sqrt{3}=$	**2p**
	$=\sqrt{3}x\left(y-\sqrt{3}\right)-3\left(y-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}=\sqrt{3}\left(x-\sqrt{3}\right)\left(y-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$x\circ\sqrt{3}=\sqrt{3}$, $\sqrt{3}\circ y=\sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$3^1\circ 3^{\frac{1}{2}}\circ 3^{\frac{1}{3}}\circ\ldots\circ 3^{\frac{1}{2021}}=\left(3^1\circ\sqrt{3}\right)\circ 3^{\frac{1}{3}}\circ\ldots\circ 3^{\frac{1}{2021}}=\sqrt{3}\circ\left(3^{\frac{1}{3}}\circ\ldots\circ 3^{\frac{1}{2021}}\right)=\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(x-\operatorname{arctg}x)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{5x}{x^2+x+4}=0$ și $f(0)=0$, obținem $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, deci f este continuă în $x=0$	**3p**
	Cum f este continuă pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(x)=x-\operatorname{arctg}x\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$, pentru orice $x\in(-\infty,0)$	**3p**
	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(-\infty,0)$, deci funcția f este crescătoare pe $(-\infty,0)$	**2p**
c)	f este crescătoare pe $(-\infty,0)$ și continuă în $x=0$, deci $f(x)\le f(0)$ și, cum $f(0)=0$, obținem $f(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0)$	**2p**
	Pentru orice $x\in[0,+\infty)$, $f(x)\le 1\Leftrightarrow\frac{5x}{x^2+x+4}\le 1\Leftrightarrow x^2-4x+4\ge 0\Leftrightarrow(x-2)^2\ge 0$, deci $f(x)\le 1$, pentru orice număr real $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f(x)\le 1$, pentru orice număr real x	**3p**
2.a)	$\int\limits_1^5 x(x+2)f(x)\,dx=\int\limits_1^5(x+1)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big\|_1^5=$	**3p**
	$=\frac{25}{2}+5-\left(\frac{1}{2}+1\right)=16$	**2p**
b)	$\int\limits_1^3 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^3\frac{2x+2}{x^2+2x}\,dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x\right)\Big\|_1^3=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}(\ln 15-\ln 3)=\frac{1}{2}\ln 5$	**2p**

c)	$F'(x)=f(x)$, $x\in(0,+\infty)\Rightarrow F''(x)=\dfrac{x^2+2x-(x+1)(2x+2)}{\left(x^2+2x\right)^2}=-\dfrac{x^2+2x+2}{\left(x^2+2x\right)^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$F''(x)<0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este concavă	**2p**