Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Testul 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați media geometrică a numerelor $x=\log_6 8+\log_6 27$ și $y=\sqrt{2^2\cdot 3^3+6^2}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+a$, unde a este număr real. Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care graficul funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $7^{2-x^2}=7^{2x-1}$.

5p **4.** Arătați că produsul numerelor A_5^2, C_6^2 și A_4^2 este pătratul unui număr natural.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,\ a+1)$, $B(2,-3)$ și $C(3,\ 1-a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care punctele A, B și C sunt coliniare.

5p **6**. Determinați raza cercului înscris în triunghiul MNP, dreptunghic în N, ştiind că $MN=12$ și $NP=16$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 2 & 1\\ 2 & 4 & -a\\ 1 & a & -1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+2y+z=1\\ 2x+4y-az=1\\ x+ay-z=0\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-3$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Arătați că sistemul de ecuații **nu** admite nicio soluție (x_0,y_0,z_0) astfel încât $x_0=\dfrac{y_0}{2}=\dfrac{z_0}{3}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3-27}$.

5p **a)** Arătați că $2021*(-2021)=-3$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x+27}$. Demonstrați că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3+3}{x^6+7}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{-3x^2\left(x^3-1\right)\left(x^3+7\right)}{\left(x^6+7\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați asimptotele graficului funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\left|f(x)-f(y)\right|\le\dfrac{4}{7}$, pentru orice numere reale x și y.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{e^{2x}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \dfrac{e^{3x}f(x)}{2x+1}\,dx=e-1$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^2 \dfrac{1}{x(x+2)}f\left(\dfrac{1}{x}\right)dx=\dfrac{e-1}{2e^2}$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$x=\log_6(8\cdot 27)=3$, $y=\sqrt{144}=12$	**2p**
	Media geometrică a numerelor x și y este $\sqrt{xy}=\sqrt{3\cdot 12}=6$	**3p**
2.	Graficul funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte $\Leftrightarrow \Delta>0$, deci $4-4a>0$	**3p**
	$a\in(-\infty,1)$	**2p**
3.	$2-x^2=2x-1 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=1$	**2p**
4.	$A_5^2=4\cdot 5$, $C_6^2=3\cdot 5$ și $A_4^2=3\cdot 4$	**3p**
	$A_5^2\cdot C_6^2\cdot A_4^2=4^2\cdot 3^2\cdot 5^2=60^2$	**2p**
5.	$m_{AB}=-\dfrac{a+4}{3}$, $m_{BC}=4-a$, unde a este număr real	**2p**
	A, B și C sunt coliniare $\Leftrightarrow m_{AB}=m_{BC} \Leftrightarrow a+4=3a-12$, deci $a=8$	**3p**
6.	$MP=20$, deci semiperimetrul ΔMNP este $p=24$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta MNP}=\dfrac{MN\cdot NP}{2}=96 \Rightarrow r=\dfrac{\mathcal{A}_{\Delta MNP}}{p}=\dfrac{96}{24}=4$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&-1\\1&1&-1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&4&-1\\1&1&-1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-4+2+(-2)-4-(-1)-(-4)=-3$	**3p**
b)	$\det(A(a))=a^3-4a$, pentru orice număr real a	**2p**
	$A(a)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(a))\neq 0 \Leftrightarrow a(a-2)(a+2)\neq 0$, deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,0,2\}$	**3p**
c)	Dacă (x_0,y_0,z_0) este soluție a sistemului cu $x_0=\dfrac{y_0}{2}=\dfrac{z_0}{3}$, atunci $\begin{cases}ax_0+4x_0+3x_0=1\\2x_0+8x_0-3ax_0=1\\x_0+2ax_0-3x_0=0\end{cases}$, unde a este număr real, deci $\begin{cases}x_0(a+7)=1\\x_0(10-3a)=1\\2x_0(a-1)=0\end{cases}$	**2p**
	$x_0(a+7)=1$, deci $x_0\neq 0$ și, cum $2x_0(a-1)=0$, obținem că $a=1$; $x_0(a+7)=1\Rightarrow x_0=\dfrac{1}{8}$ și $x_0(10-3a)=1\Rightarrow x_0=\dfrac{1}{7}$, ceea ce este imposibil	**3p**

2.a)	$2021*(-2021)=\sqrt[3]{2021^3+(-2021)^3-27}=\sqrt[3]{2021^3-2021^3-27}=$	**3p**
	$=\sqrt[3]{-27}=-3$	**2p**
b)	$x*e=x\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^3+e^3-27}=x\Leftrightarrow x^3+e^3-27=x^3$, pentru orice număr real $x\Leftrightarrow e=3$	**3p**
	Cum $3*x=\sqrt[3]{3^3+x^3-27}=\sqrt[3]{x^3}=x$, pentru orice număr real x, obținem că $e=3$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p**
c)	$f(x)*f(y)=\sqrt[3]{f^3(x)+f^3(y)-27}=\sqrt[3]{(x+27)+(y+27)-27}=$	**3p**
	$=\sqrt[3]{x+y+27}=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{3x^2\left(x^6+7\right)-6x^5\left(x^3+3\right)}{\left(x^6+7\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{-3x^2\left(x^6+6x^3-7\right)}{\left(x^6+7\right)^2}=\dfrac{-3x^2\left(x^3-1\right)\left(x^3+7\right)}{\left(x^6+7\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+3}{x^6+7}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+3}{x^6+7}=0$	**2p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ și spre $+\infty$ la graficul funcției f, iar graficul funcției f nu admite asimptote verticale	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{7}$, $x=0$ sau $x=1$; $f'(x)\le0$, pentru orice $x\in\left(-\infty,-\sqrt[3]{7}\right]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left(-\infty,-\sqrt[3]{7}\right]$, $f'(x)\ge0$, pentru orice $x\in\left[-\sqrt[3]{7},1\right]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left[-\sqrt[3]{7},1\right]$ și $f'(x)\le0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,+\infty)$	**3p**
	$f\left(-\sqrt[3]{7}\right)=-\dfrac{1}{14}$, $f(1)=\dfrac{1}{2}$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, deci $-\dfrac{1}{14}\le f(x)\le\dfrac{1}{2}$, pentru orice număr real x, de unde obținem $-\dfrac{4}{7}\le f(x)-f(y)\le\dfrac{4}{7}$, deci $\lvert f(x)-f(y)\rvert\le\dfrac{4}{7}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1\frac{e^{3x}f(x)}{2x+1}dx=\int_0^1 e^x dx=e^x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=e^1-e^0=e-1$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_0^1 e^x f(x)dx=\int_0^1(2x+1)e^{-x}dx=\int_0^1(2x+1)\left(-e^{-x}\right)'dx=-(2x+1)e^{-x}\Big\vert_0^1+\int_0^1 2e^{-x}dx=$	**3p**
	$=-\dfrac{3}{e}+1-2e^{-x}\Big\vert_0^1=-\dfrac{3}{e}+1-\dfrac{2}{e}+2=\dfrac{3e-5}{e}$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x(x+2)}f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2\frac{1}{x^2}e^{-\frac{2}{x}}dx=\frac{1}{2}\int_1^2\left(-\frac{2}{x}\right)'e^{-\frac{2}{x}}dx=\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{x}}\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2e}-\dfrac{1}{2e^2}=\dfrac{e-1}{2e^2}$	**2p**