

**Examenul de bacalaureat național 2021**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Testul 8**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $b_2 = 2$  și  $b_3 = 4$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 5x + 3$ . Determinați produsul absciselor punctelor în care graficul funcției  $f$  intersectează axa  $Ox$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2\sqrt{x+2} = 1 - x$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă toate cifrele pare.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(1,3)$ ,  $B(-1,0)$  și  $C(a,a+2)$ , unde  $a$  este număr real. Determinați numărul real  $a$  pentru care vectorii  $\overline{OC}$  și  $\overline{AB}$  sunt coliniari.
- 5p** 6. Arătați că  $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x$ , pentru orice număr real  $x$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ a+2 & a+3 \end{pmatrix}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(0)) = -2$ .
- 5p** b) Arătați că matricea  $A(a)$  este inversabilă, pentru orice număr real  $a$ .
- 5p** c) Demonstrați că, dacă  $a$  și  $b$  sunt numere întregi și  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  astfel încât  $A(a) \cdot X = A(b)$ , atunci elementele matricei  $X$  sunt numere întregi.
2. Pe mulțimea  $A = (0, +\infty)$  se definește legea de compoziție  $x \circ y = \frac{2x}{y} + \frac{2y}{x}$ .
- 5p** a) Arătați că numărul  $a = 2 \circ 4$  este întreg.
- 5p** b) Arătați că  $x \circ y \geq 4$ , pentru orice  $x, y \in A$ .
- 5p** c) Arătați că legea de compoziție „ $\circ$ ” **nu** admite element neutru.

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (-1,1) \cup (1,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{-4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$ ,  $x \in (-1,1) \cup (1,+\infty)$ .
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul în care graficul intersectează axa  $Oy$ .
- 5p** c) Calculați  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f(x+1)}$ .
2. Se consideră funcția  $f: (-4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_0^2 (x+4)f(x)dx = 6$ .

**5p** b) Calculați  $\int_0^1 f(x) dx$ .

**5p** c) Arătați că  $\int_0^n f(x)e^{-x} dx < 1$ , pentru orice număr natural nenul  $n$ .

**Examenul de bacalaureat național 2021**  
**Proba E. c)**  
**Matematică *M\_șt-nat***  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Testul 8

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$q = 2$ , unde $q$ este rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ $b_1 = 1$ , deci $b_1 + b_2 + b_3 = 7$	2p 3p
2.	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 = 0$ Cum $\Delta > 0$ , graficul funcției $f$ intersectează axa $Ox$ în două puncte distincte pentru care produsul absciselor este egal cu $x_1 x_2 = \frac{3}{1} = 3$	2p 3p
3.	$4(x+2) = (1-x)^2 \Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0$ $x = -1$ , care convine; $x = 7$ , care nu convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile Cifra sutelor poate fi aleasă în 4 moduri, iar pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifrele zecilor și unităților se pot alege în câte 5 moduri, deci există $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{100}{900} = \frac{1}{9}$	2p 2p 1p
5.	$\vec{OC} = a\vec{i} + (a+2)\vec{j}$ , $\vec{AB} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$ $\frac{a}{-2} = \frac{a+2}{-3} \Leftrightarrow a = 4$	2p 3p
6.	$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} + \sin x \cos \frac{\pi}{3} - \cos x \sin \frac{\pi}{3} =$ $= 2 \sin x \cos \frac{\pi}{3} = 2 \sin x \cdot \frac{1}{2} = \sin x$ , pentru orice număr real $x$	3p 2p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A(0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$ $= 0 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = -2$	2p 3p
b)	$\det A(a) = \begin{vmatrix} a & a+1 \\ a+2 & a+3 \end{vmatrix} = a^2 + 3a - a^2 - 3a - 2 = -2$ , pentru orice număr real $a$ $\det A(a) \neq 0 \Rightarrow A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real $a$	3p 2p
c)	$(A(a))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a+3}{2} & \frac{a+1}{2} \\ \frac{a+2}{2} & -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$ , pentru orice număr întreg $a$ $X = (A(a))^{-1} A(b) = \begin{pmatrix} a-b+1 & a-b \\ b-a & b-a+1 \end{pmatrix}$ și, cum $a$ și $b$ sunt numere întregi, obținem că $X$ are toate elementele numere întregi	2p 3p

<b>2.a)</b>	$a = 2 \circ 4 = \frac{2 \cdot 2}{4} + \frac{2 \cdot 4}{2} =$ $= 1 + 4 = 5$ , care este număr întreg	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>b)</b>	$x \circ y = \frac{2x^2 + 2y^2}{xy}$ , pentru orice $x, y \in A$ $x \circ y - 4 = \frac{2x^2 + 2y^2 - 4xy}{xy} = \frac{2(x-y)^2}{xy} \geq 0$ , deci $x \circ y \geq 4$ , pentru orice $x, y \in A$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	Dacă legea de compoziție „ $\circ$ ” ar admite element neutru, atunci ar exista $e \in A$ astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$ , pentru orice $x \in A \Rightarrow e \circ e = e$ , de unde obținem $e = \frac{2e}{e} + \frac{2e}{e}$ , deci $e = 4$ Cum $2 \circ 4 \neq 2$ , obținem că $e = 4$ nu convine, deci legea de compoziție „ $\circ$ ” nu admite element neutru	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} =$ $= \frac{-x^2 - 2x - 1 + x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{-4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$ , $x \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>b)</b>	Graficul funcției $f$ intersectează axa $Oy$ în punctul $A(0, f(0))$ , $f(0) = -2$ și $f'(0) = 0$ Ecuația tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ , adică $y = -2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$\frac{f(x)}{f(x+1)} = \frac{x(x+2)}{(x-1)(x+1)}$ , $x \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 1$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^2 (x+4)f(x) dx = \int_0^2 (x+2) dx = \frac{x^2}{2} \Big _0^2 + 2x \Big _0^2 =$ $= 2 - 0 + 4 - 0 = 6$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+4}\right) dx = (x - 2 \ln(x+4)) \Big _0^1 =$ $= 1 - 2 \ln 5 + 2 \ln 4 = 1 - 2 \ln \frac{5}{4}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$\frac{x+2}{x+4} \leq 1$ și $e^{-x} > 0$ , deci $f(x)e^{-x} \leq e^{-x}$ , pentru orice $x \in [0, n]$ , pentru orice număr natural nenul $n$ $\int_0^n f(x)e^{-x} dx \leq \int_0^n e^{-x} dx = -e^{-x} \Big _0^n = 1 - e^{-n} < 1$ , pentru orice număr natural nenul $n$	<b>2p</b> <b>3p</b>