Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Testul 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinaţi al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$, ştiind că $a_3=5$ şi $a_5=11$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+1$. Determinaţi numărul real a ştiind că $f(a)=f(a+1)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-x+13}=x+1$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele strict mai mici decât 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$, $B(-1,1)$ şi $C(3,a)$, unde a este număr real. Determinaţi numărul real a pentru care dreptele OC și AB sunt perpendiculare.

5p **6.** Arătaţi că, pentru orice număr real x, $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+5x & -2x\\ 10x & 1-4x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Demonstraţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+xy)$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Determinaţi perechile de numere întregi (m,n) pentru care matricea $A(m)$ este inversa matricei $A(n)$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+x+2ay$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $1\circ 0=1$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinaţi numărul real a, știind că $x\circ 1>4$ dacă și numai dacă $x\in(3,+\infty)$.

5p **c)** Arătaţi că legea de compoziţie „$\circ$” este asociativă dacă şi numai dacă $a=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{e^x}$.

5p **a)** Arătaţi că $e^x\left(f(x)+f'(x)\right)=1$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinaţi ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că dreapta de ecuație $y=x$ este tangentă la graficul funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^{\pi} f(x)\,dx=2$.

5p **b)** Calculaţi $\int_0^{\pi} xf(x)\,dx$.

5p **c)** Arătaţi că $\int_0^{1} f(x)\,dx\ge\int_0^{1} f^2(x)\,dx$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_4=\frac{a_3+a_5}{2}=\frac{5+11}{2}=$	**3p**
	$=8$	**2p**
2.	$a^2+1=(a+1)^2+1\Leftrightarrow a^2+1=a^2+2a+2\Leftrightarrow 2a+1=0$	**3p**
	$a=-\frac{1}{2}$	**2p**
3.	$x^2-x+13=x^2+2x+1\Leftrightarrow 3x=12$	**3p**
	$x=4$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Cifra zecilor poate fi aleasă în 2 moduri, iar pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităţilor se poate alege în câte 3 moduri, deci sunt $2\cdot 3=6$ cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$	**1p**
5.	$m_{AB}=1$ și $m_{OC}=\frac{a}{3}$, unde a este număr real	**2p**
	$OC\perp AB\Leftrightarrow m_{AB}\cdot m_{OC}=-1\Leftrightarrow \frac{a}{3}=-1$, de unde obținem $a=-3$	**3p**
6.	$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}+\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3}=$	**2p**
	$=2\cos x\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot\cos x\cdot\frac{1}{2}=\cos x$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}6&-2\\10&-3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}6&-2\\10&-3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=6\cdot(-3)-10\cdot(-2)=2$	**3p**
b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}(1+5x)(1+5y)-20xy & -2y(1+5x)-2x(1-4y)\\10x(1+5y)+10y(1-4x) & -20xy+(1-4x)(1-4y)\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1+5x+5y+5xy & -2x-2y-2xy\\10x+10y+10xy & 1-4x-4y-4xy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+5(x+y+xy) & -2(x+y+xy)\\10(x+y+xy) & 1-4(x+y+xy)\end{pmatrix}=A(x+y+xy)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

c)	$\left(A(m)\right)^{-1}=A(n)\Leftrightarrow A(m)A(n)=I_2\Leftrightarrow A(m+n+mn)=A(0)\Leftrightarrow m+n+mn=0$, unde m și n sunt numere întregi, $m\neq -1$ şi $n\neq -1$	**3p**
	$mn+m+n+1=1\Leftrightarrow (m+1)(n+1)=1$ şi, cum m şi n sunt numere întregi, obținem $m=n=-2$ sau $m=n=0$, deci perechile sunt $(-2,-2)$ și $(0,0)$, care convin	**2p**
2.a)	$1\circ 0=1\cdot 0+1+2\cdot a\cdot 0=$	**3p**
	$=0+1+0=1$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$x\circ 1>4\Leftrightarrow x+x+2a>4\Leftrightarrow 2x>4-2a\Leftrightarrow x>2-a\Leftrightarrow x\in(2-a,+\infty)$	**3p**
	$2-a=3$, deci $a=-1$	**2p**
c)	Legea de compoziţie „$\circ$” este asociativă $\Leftrightarrow (x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$, pentru orice numere reale x, y şi $z\Leftrightarrow (xy+x+2ay)z+xy+x+2ay+2az=x(yz+y+2az)+x+2a(yz+y+2az)$	**2p**
	Obținem $xz+2az=2axz+4a^2z\Leftrightarrow z(x+2a)(1-2a)=0$, pentru orice numere reale x și z, deci $a=\dfrac{1}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1\cdot e^x-x\cdot e^x}{e^{2x}}=\dfrac{e^x(1-x)}{e^{2x}}=\dfrac{1-x}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$e^x\left(f(x)+f'(x)\right)=e^x\left(\dfrac{x}{e^x}+\dfrac{1-x}{e^x}\right)=1$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$f(x)=x\Leftrightarrow x=0$	**2p**
	Cum $f(0)=0$ și $f'(0)=1$, tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$ are ecuaţia $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, deci este dreapta de ecuație $y=x$	**3p**
2.a)	$\int_0^{\pi}f(x)dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big\vert_0^{\pi}=$	**3p**
	$=-\cos\pi+\cos 0=-(-1)+1=2$	**2p**
b)	$\int_0^{\pi}xf(x)dx=\int_0^{\pi}x\sin x\,dx=-\int_0^{\pi}x(\cos x)'dx=-x\cos x\Big\vert_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx=$	**3p**
	$=-\pi\cos\pi+\sin x\Big\vert_0^{\pi}=-\pi\cdot(-1)+0-0=\pi$	**2p**
c)	$\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 f^2(x)dx=\int_0^1\left(f(x)-f^2(x)\right)dx=\int_0^1\sin x(1-\sin x)dx$	**2p**
	Pentru orice $x\in[0,1]$, $\sin x(1-\sin x)\geq 0\Rightarrow\int_0^1\sin x(1-\sin x)dx\geq 0$, deci $\int_0^1 f(x)dx\geq\int_0^1 f^2(x)dx$	**3p**