Sesiune vară rezervă

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{2}{5}\right)+\frac{4}{5}=1$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$. Arătați că $f(1)\cdot f(3)=5$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{5x-6}=2$.
5p	**4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 25.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,0)$, $B(0,2)$ și $C(0,-2)$. Determinați distanța de la punctul A la mijlocul segmentului BC.
5p	**6.** Se consideră $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos x=\frac{1}{4}$. Arătați că $\sin x=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x & 1\\ -1 & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det A=10$.
5p	**b)** Arătați că $2B(5)+B(-1)=3B(3)$.
5p	**c)** Determinați numărul întreg x pentru care $\det\left(A\cdot B(x)-B(4x)\right)=0$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x(y-2)+y(x-2)$.
5p	**a)** Arătați că $2*4=4$.
5p	**b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x=0$.
5p	**c)** Determinați numărul real x pentru care $(x*1)*(x+1)=4$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{2x^2+1}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-8x}{\left(2x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf(x)\ln x\right)=0$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+6x+1$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-x^3-1\right)dx=9$.
5p	**b)** Arătați că $\int_0^1\frac{x^2}{f(x)-6x}dx=\frac{1}{3}\ln 2$.
5p	**c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx=\frac{a^3}{5}$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{2}{5}\right)+\frac{4}{5}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=$	**3p**
	$=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=1$	**2p**
2.	$f(1)=1$	**2p**
	$f(3)=5\Rightarrow f(1)\cdot f(3)=1\cdot 5=5$	**3p**
3.	$5x-6=2^2\Rightarrow 5x-6=4$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre, multiplii de 25 sunt numerele 25, 50 și 75, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{90}=\frac{1}{30}$	**1p**
5.	$O(0,0)$ este mijlocul segmentului BC	**2p**
	$AO=4$	**3p**
6.	$\sin^2 x+\left(\frac{1}{4}\right)^2=1\Leftrightarrow\sin^2 x=\frac{15}{16}$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{\sqrt{15}}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}4 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=4\cdot 1-(-3)\cdot 2=$	**3p**
	$=4+6=10$	**2p**
b)	$B(5)=\begin{pmatrix}5 & 1\\ -1 & 5\end{pmatrix}$ și $B(-1)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow 2B(5)+B(-1)=\begin{pmatrix}9 & 3\\ -3 & 9\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=3\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}=3B(3)$	**2p**
c)	$A\cdot B(x)-B(4x)=\begin{pmatrix}4x+3 & 4-3x\\ 2x-1 & 2+x\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4x & 1\\ -1 & 4x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3-3x\\ 2x & 2-3x\end{pmatrix}$, pentru orice număr întreg x, deci $\det\left(A\cdot B(x)-B(4x)\right)=6x^2-15x+6$, pentru orice număr întreg x	**3p**
	$6x^2-15x+6=0$ și, cum x este număr întreg, obținem $x=2$	**2p**

2.a)	$2*4=2(4-2)+4(2-2)=2\cdot 2+4\cdot 0=$ $=4+0=4$	**3p** **2p**
b)	$x*x=x(x-2)+x(x-2)=2x(x-2)$, pentru orice număr real x $2x(x-2)=0$, de unde obținem $x=0$ sau $x=2$	**3p** **2p**
c)	$x*1=-2$, deci $(x*1)*(x+1)=(-2)*(x+1)=-6x-2$, pentru orice număr real x $-6x-2=4$, de unde obținem $x=-1$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{2'\cdot(2x^2+1)-2\cdot(2x^2+1)'}{(2x^2+1)^2}=$ $=\dfrac{-2\cdot 4x}{(2x^2+1)^2}=\dfrac{-8x}{(2x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$f(0)=2$, $f'(0)=0$ Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=2$	**2p** **3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}(xf(x)\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x\ln x}{2x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2\ln x+2}{4x}\right)=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x}=0$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_1^2\left(f(x)-x^3-1\right)dx=\int_1^2 6x\,dx=3x^2\Big\vert_1^2=$ $=12-3=9$	**3p** **2p**
b)	$\int_0^1\dfrac{x^2}{f(x)-6x}dx=\int_0^1\dfrac{x^2}{x^3+1}dx=\dfrac{1}{3}\int_0^1\dfrac{(x^3+1)'}{x^3+1}dx=\dfrac{1}{3}\ln(x^3+1)\Big\vert_0^1=$ $=\dfrac{1}{3}\ln 2-\dfrac{1}{3}\ln 1=\dfrac{1}{3}\ln 2$	**3p** **2p**
c)	$\int_0^1 f(\sqrt{x})dx=\int_0^1\left(x\sqrt{x}+6\sqrt{x}+1\right)dx=\left(\dfrac{2x^2\sqrt{x}}{5}+6\cdot\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}+x\right)\Big\vert_0^1=\dfrac{27}{5}$ $\dfrac{a^3}{5}=\dfrac{27}{5}$, de unde obținem $a=3$	**3p** **2p**