

Matematică *M\_tehnologic*

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că  $2 \cdot \left(2 - \frac{3}{4} : \frac{1}{2}\right) = 1$ .
- 5p 2. Se consideră funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + 2$  și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x - 4$ . Arătați că  $f(1) + g(1) = 0$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{4-x} = 4$ .
- 5p 4. Un produs costă 70 de lei. Determinați prețul produsului după o scumpire cu 30%.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-3, 4)$ ,  $B(-3, 0)$  și  $C(0, 4)$ . Calculați perimetrul triunghiului  $ABC$ .
- 5p 6. Se consideră triunghiul  $ABC$ , în care  $AC = 2$ ,  $BC = 4$  și unghiul  $A$  are măsura egală cu  $30^\circ$ . Arătați că  $\sin B = \frac{1}{4}$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p a) Arătați că  $\det A = 7$ .
- 5p b) Arătați că  $2B + I_2 = 3A$ .
- 5p c) Determinați matricea  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  pentru care  $A \cdot X - B \cdot X = I_2 - X$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = 3 - (x - 3)(y - 3)$ .
- 5p a) Arătați că  $1 * 3 = 3$ .
- 5p b) Arătați că  $e = 2$  este elementul neutru al legii de compoziție „\*”.
- 5p c) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui  $x$  pentru care  $x * (x + 6) \geq 3$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{4}{x} + \ln x - 5$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{x-4}{x^2}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p b) Determinați intervalele de monotonie a funcției  $f$ .
- 5p c) Arătați că **nu** există asimptotă spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x + 3x^2 + 3$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_1^2 (f(x) - e^x - 3) dx = 7$ .
- 5p b) Arătați că  $\int_0^1 x(f(x) - 3x^2) dx = \frac{5}{2}$ .
- 5p c) Determinați  $a \in (0, 1)$ , știind că  $\int_0^a \frac{1}{f(x) - f'(x)} dx = \frac{1}{6}$ .

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică *M\_tehnologic***

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianta 2**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$2 \cdot \left( 2 - \frac{3}{4} : \frac{1}{2} \right) = 2 \cdot \left( 2 - \frac{3}{2} \right) =$ $= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.</b>	$f(1) = 3$ $g(1) = -3 \Rightarrow f(1) + g(1) = 3 + (-3) = 0$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>3.</b>	$2^{4-x} = 2^2 \Leftrightarrow 4 - x = 2$ $x = 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>4.</b>	$\frac{30}{100} \cdot 70 = 21$ de lei Prețul după scumpire este $70 + 21 = 91$ de lei	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>5.</b>	$AB = 4, AC = 3$ $BC = 5$ , de unde obținem $P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = 12$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>6.</b>	$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \Leftrightarrow \frac{2}{\sin B} = \frac{4}{\frac{1}{2}}$ $\sin B = \frac{1}{4}$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 2 =$ $= 3 + 4 = 7$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$2B + I_2 = 2 \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} =$ $= 3 \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3A$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$A \cdot X - B \cdot X = I_2 - X \Leftrightarrow (A - B + I_2) \cdot X = I_2$ Cum $\det(A - B + I_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ , obținem $X = (A - B + I_2)^{-1}$ , deci $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$1 * 3 = 3 - (1 - 3)(3 - 3) =$ $= 3 - 0 = 3$	<b>3p</b> <b>2p</b>

<b>b)</b>	$x * 2 = 3 - (x-3)(2-3) = 3 + x - 3 = x$ , pentru orice număr real $x$	<b>2p</b>
	$2 * x = 3 - (2-3)(x-3) = 3 + x - 3 = x$ , pentru orice număr real $x$ , deci $e = 2$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	<b>3p</b>
<b>c)</b>	$x * (x+6) = 3 - (x-3)(x+3)$ , pentru orice număr real $x$	<b>2p</b>
	$3 - (x-3)(x+3) \geq 3 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) \leq 0$ , de unde obținem $x \in [-3, 3]$	<b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x} - 0 =$	<b>3p</b>
	$= \frac{-4+x}{x^2} = \frac{x-4}{x^2}$ , $x \in (0, +\infty)$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$	<b>2p</b>
	$f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in (0, 4] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0, 4]$ și $f'(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in [4, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[4, +\infty)$	<b>3p</b>
<b>c)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4}{x^2} + \frac{\ln x}{x} - \frac{5}{x} \right) = 0$	<b>3p</b>
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4}{x} + \ln x - 5 \right) = +\infty$ , deci nu există asimptotă spre $+\infty$ la graficul funcției $f$	<b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_1^2 (f(x) - e^x - 3) dx = \int_1^2 3x^2 dx = x^3 \Big _1^2 =$	<b>3p</b>
	$= 8 - 1 = 7$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_0^1 x(f(x) - 3x^2) dx = \int_0^1 (xe^x + 3x) dx = (xe^x - e^x) \Big _0^1 + \frac{3x^2}{2} \Big _0^1 =$	<b>3p</b>
	$= 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) = e^x + 6x \Rightarrow f(x) - f'(x) = 3(x-1)^2$ , deci $\int_0^a \frac{1}{f(x) - f'(x)} dx = \frac{1}{3} \int_0^a \frac{1}{(x-1)^2} dx =$	<b>3p</b>
	$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} \Big _0^a = -\frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{a-1} + 1 \right)$ , pentru orice $a \in (0, 1)$ $-\frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{a-1} + 1 \right) = \frac{1}{6}$ , de unde obținem $a = \frac{1}{3}$ , care convine	<b>2p</b>