**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_tehnologic***

**Testul 10**

***Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Arătați că $\left(3+\sqrt{5}\right)^2-\sqrt{5}\left(6+2\sqrt{5}\right)=4$.

**5p** **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x-1$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.

**5p** **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuația $2^{x+4}=4^{x+3}$.

**5p** **4.** Un produs costă $360$ de lei. Determinați prețul produsului după o scumpire cu $15\%$.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(-2,3)$, $B(-1,-4)$ și $C(5,4)$. Arătați că triunghiul $AMC$ este dreptunghic, unde $M$ este mijlocul segmentului $BC$.

**5p** **6.** Se consideră triunghiul $ABC$, în care unghiurile $A$ și $B$ au măsurile egale cu $30°$, respectiv $45°$ și $BC=4$. Determinați lungimea laturii $AC$ a triunghiului $ABC$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}-1 & x\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, unde $x$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $\det A=1$.

**5p** **b)** Determinați numărul real $x$ pentru care $B\cdot B=A$.

**5p** **c)** Determinați numerele reale $x$ pentru care $\det\left(B+(\det B)A\right)=0$.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=x+y+16$.

**5p** **a)** Arătați că $(-8)\circ 2=10$.

**5p** **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

**5p** **c)** Determinați numărul real $x$ pentru care pentru care $x\circ\left(\frac{x}{2}+3\right)\circ x=2x$.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{x^2}+\ln x-2$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(x-2)(x+2)}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2f(x)}{x^3-1}=-1$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=-\frac{2}{3}$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_1^e\left(f(x)+1\right)\ln x\,dx=\frac{2e^3+1}{9}$.

**5p** **c)** Determinați numărul real, $a$, $a\in(0,+\infty)$, pentru care $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(f(\sin x)+f(\cos x)\right)\operatorname{tg}x\,dx=\ln a$.

**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_tehnologic***
**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Testul 10**

***Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale***

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $\left(3+\sqrt{5}\right)^2-\sqrt{5}\left(6+2\sqrt{5}\right)=9+6\sqrt{5}+5-6\sqrt{5}-10=$ | **3p** |
| | $=14-10=4$ | **2p** |
| **2.** | $f(x)=g(x)\Leftrightarrow 5x+1=3x-1\Leftrightarrow 2x=-2$ | **3p** |
| | Abscisa punctului de intersecție este $x=-1$ | **2p** |
| **3.** | $2^{x+4}=2^{2(x+3)}\Leftrightarrow x+4=2x+6$ | **3p** |
| | $x=-2$ | **2p** |
| **4.** | $360+\dfrac{15}{100}\cdot 360=$ | **2p** |
| | $=360+54=414$ lei | **3p** |
| **5.** | $M(2,0)$ | **2p** |
| | $m_{AM}=-\dfrac{3}{4}$, $m_{MC}=\dfrac{4}{3}$, de unde obținem $m_{AM}\cdot m_{MC}=-1$, deci triunghiul $AMC$ este dreptunghic | **3p** |
| **6.** | $\sin 30°=\dfrac{1}{2}$, $\sin 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | **2p** |
| | $\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}\Leftrightarrow \dfrac{4}{\frac{1}{2}}=\dfrac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Leftrightarrow AC=4\sqrt{2}$ | **3p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $\det A=\begin{vmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{vmatrix}=3\cdot 3-(-4)\cdot(-2)=$ | **3p** |
| | $=9-8=1$ | **2p** |
| **b)** | $B\cdot B=\begin{pmatrix}1+x & -2x\\ -2 & x+1\end{pmatrix}$, pentru orice număr real $x$ | **3p** |
| | $\begin{pmatrix}1+x & -2x\\ -2 & x+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=2$ | **2p** |
| **c)** | $\det B=1-x\Rightarrow \det\left(B+(\det B)A\right)=\begin{vmatrix}-3x+2 & 5x-4\\ 2x-1 & -3x+2\end{vmatrix}=-x^2+x$, pentru orice număr real $x$ | **3p** |
| | $-x^2+x=0$, de unde obținem $x=0$ sau $x=1$ | **2p** |
| **2.a)** | $(-8)\circ 2=-8+2+16=$ | **3p** |
| | $=-6+16=10$ | **2p** |
| **b)** | $x\circ e=x$, pentru orice număr real $x$, de unde obținem $e=-16$ | **2p** |
| | $-16\circ x=-16+x+16=x$, pentru orice număr real $x$, deci $e=-16$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$” | **3p** |

| | | |
|---|---|---|
| **c)** | $x\circ\left(\frac{x}{2}+3\right)=\frac{3x}{2}+19\Rightarrow x\circ\left(\frac{x}{2}+3\right)\circ x=\frac{5x}{2}+35$, pentru orice număr real $x$ | **3p** |
| | $\frac{5x}{2}+35=2x$, de unde obținem $x=-70$ | **2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=-\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x}-0=$ | **3p** |
| | $=\frac{x^2-4}{x^3}=\frac{(x-2)(x+2)}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$ | **2p** |
| **b)** | $f(1)=0$, $f'(1)=-3$ | **2p** |
| | Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=-3x+3$ | **3p** |
| **c)** | $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2f(x)}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2+x^2\ln x-2x^2}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(2+x^2\ln x-2x^2\right)'}{\left(x^3-1\right)'}=$ | **2p** |
| | $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{0+2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}-4x}{3x^2-0}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x\ln x-3x}{3x^2}=-1$ | **3p** |
| **2.a)** | $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^2-1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big\|_0^1=$ | **3p** |
| | $=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$ | **2p** |
| **b)** | $\int_1^e\left(f(x)+1\right)\ln x dx=\int_1^e x^2\ln x dx=\int_1^e\left(\frac{x^3}{3}\right)'\ln x dx=\left(\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}\right)\Big\|_1^e=$ | **3p** |
| | $=\frac{e^3}{3}-\frac{e^3}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2e^3+1}{9}$ | **2p** |
| **c)** | $f(\sin x)+f(\cos x)=\sin^2x-1+\cos^2x-1=\sin^2x+\cos^2x-2=-1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(f(\sin x)+f(\cos x)\right)\operatorname{tg}x dx=-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\operatorname{tg}x dx=\ln(\cos x)\Big\|_0^{\frac{\pi}{3}}=\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)-\ln(\cos 0)=\ln\frac{1}{2}$ | **3p** |
| | $\ln\frac{1}{2}=\ln a$, de unde obținem $a=\frac{1}{2}$, care convine | **2p** |