

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

Testul 12

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\left(\frac{2}{3}\right)^2 : \frac{1}{3} - 3 : 9 = 1$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 9$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 4x + 8} = x$.
- 5p 4. După o ieftinire cu 8%, un produs costă 184 de lei. Determinați prețul produsului înainte de ieftinire.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,3)$, $B(4,1)$, C și D . Știind că punctele C și B sunt mijloacele segmentelor AB , respectiv CD , determinați coordonatele punctului D .
- 5p 6. Se consideră $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cdot \sin x$. Arătați că $\sin x = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det A = 0$.
- 5p b) Arătați că $A \cdot A = 5A$.
- 5p c) Determinați valorile reale ale lui x pentru care $\det(xA + (1-x)I_2) \geq 0$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 3xy - x^2 - y^2$.
- 5p a) Arătați că $1 * 2 = 1$.
- 5p b) Determinați numerele reale x pentru care $2 * x = 1$.
- 5p c) Determinați numerele reale x pentru care $(\sqrt[3]{x} * \sqrt[3]{x}) * \sqrt[3]{x^2} = 1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - \frac{x}{x+2}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{2(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$, $x \in (-2, +\infty)$.
- 5p b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p c) Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2 + 1}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^3 (x^2 + 1) f(x) dx = 24$.
- 5p b) Calculați $\int_0^1 (f(x) - 1) dx$.
- 5p c) Arătați că orice primitivă F a funcției f este concavă pe $[0, +\infty)$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 12

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 : \frac{1}{3} - 3 : 9 = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{1} - 3 \cdot \frac{1}{9} =$ $= \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$	3p 2p
2.	$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 9 = 0$ $x = 3$	3p 2p
3.	$\sqrt{x^2 - 4x + 8} = x \Rightarrow x^2 - 4x + 8 = x^2$ $-4x + 8 = 0$, de unde obținem $x = 2$, care convine	2p 3p
4.	$x - \frac{8}{100} \cdot x = 184$ $x = 200$ de lei	3p 2p
5.	$C(1,2)$ $4 = \frac{1+x_D}{2}$, $1 = \frac{2+y_D}{2}$, unde (x_D, y_D) sunt coordonatele punctului D , deci $x_D = 7$ și $y_D = 0$	2p 3p
6.	$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow \cos x = \sqrt{3} \sin x$ $\sin^2 x + (\sqrt{3} \sin x)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4}$ și, cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x = \frac{1}{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 6 \cdot 1 =$ $= 6 - 6 = 0$	3p 2p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+6 & 18+12 \\ 3+2 & 6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 30 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} =$ $= 5 \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 5A$	3p 2p
c)	$xA + (1-x)I_2 = \begin{pmatrix} 2x+1 & 6x \\ x & x+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(xA + (1-x)I_2) = -4x^2 + 3x + 1$, pentru orice număr real x $-4x^2 + 3x + 1 \geq 0$, de unde obținem $x \in \left[-\frac{1}{4}, 1\right]$	3p 2p
2.a)	$1 * 2 = 3 \cdot 1 \cdot 2 - 1^2 - 2^2 =$ $= 6 - 1 - 4 = 1$	3p 2p

b)	$2 * x = 6x - 4 - x^2$, pentru orice număr real x $6x - 4 - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$, de unde obținem $x = 1$ sau $x = 5$	2p 3p
c)	$\sqrt[3]{x} * \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow (\sqrt[3]{x} * \sqrt[3]{x}) * \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x^4}$, pentru orice număr real x $\sqrt[3]{x^4} = 1 \Leftrightarrow x^4 = 1$, de unde obținem $x = -1$ sau $x = 1$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2 - \frac{x+2-x}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 8x + 6}{(x+2)^2} =$ $= \frac{2(x^2 + 4x + 3)}{(x+2)^2} = \frac{2(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$, $x \in (-2, +\infty)$	3p 2p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-2, -1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-2, -1]$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [-1, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1, +\infty)$	2p 3p
c)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x+2} \right) = 2$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x}{x+2} \right) = -1$, deci dreapta de ecuație $y = 2x - 1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p 3p
2.a)	$\int_0^3 (x^2 + 1) f(x) dx = \int_0^3 (x^2 + 5) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 5x \right) \Big _0^3 =$ $= 9 + 15 = 24$	3p 2p
b)	$\int_0^1 (f(x) - 1) dx = \int_0^1 \frac{4}{x^2 + 1} dx = 4 \arctg x \Big _0^1 =$ $= 4 \arctg 1 - 4 \arctg 0 = \pi$	3p 2p
c)	F este primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ $F''(x) = f'(x) = \frac{-8x}{(x^2 + 1)^2} \leq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$, deci F este concavă pe $[0, +\infty)$	2p 3p