Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Testul 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\sqrt{12}\left(\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)+\sqrt{8}\left(3\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+a$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care $f(a)=2$.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuația $\sqrt{9-x}=x-3$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale pare de două cifre, acesta să fie multiplu de 5.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-6,1)$ și $B(-2,3)$. Determinați distanța de la punctul O la punctul M, unde M este mijlocul segmentului AB.

5p **6**. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $AB=12$ și ipotenuza $BC=20$. Calculați aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -4\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x & 3\\ x & 4\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=-1$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=B(x)\cdot A$.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $\det\left(aA+B(a)\right)=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x^2+xy+y^2$.

5p **a)** Arătați că $2*(-1)=3$.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $n*n=48$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-x-5\ln x+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x-1)(6x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+5\ln x}{xf'(x)}=\dfrac{1}{2}$.

5p **c)** Demonstrați că $3x^2-x-2\geq\ln\left(x^5\right)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că $\int\limits_{-1}^{2}(x+2)f(x)dx=6$.

5p **b)** Calculați $\int\limits_{0}^{4}\left(f(x)-\dfrac{x^2}{x+2}\right)dx$.

5p **c)** Determinați numărul natural n, știind că $\int\limits_{0}^{6}\left(x^2-9\right)f(x+1)dx=n^2$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{12}\left(\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)+\sqrt{8}\left(3\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=\sqrt{36}-3\sqrt{24}+3\sqrt{24}-\sqrt{16}=$	**3p**
	$=6-4=2$	**2p**
2.	$f(a)=a^2-2a+a$, deci $a^2-a-2=0$	**3p**
	$a=-1$ sau $a=2$	**2p**
3.	$9-x=x^2-6x+9$	**3p**
	$x=0$, care nu convine; $x=5$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale pare de două cifre are 45 de elemente, deci sunt 45 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale pare de două cifre, care sunt multipli de 5, sunt 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{9}{45}=\dfrac{1}{5}$	**1p**
5.	$M(-4,2)$	**3p**
	$OM=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$	**2p**
6.	Triunghiul ABC este dreptunghic, deci $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=16$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{AB\cdot AC}{2}=\dfrac{12\cdot 16}{2}=96$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & -4\end{vmatrix}=1\cdot(-4)-1\cdot(-3)=$	**3p**
	$=-4+3=-1$	**2p**
b)	$A\cdot B(x)=\begin{pmatrix}-2x & -9\\ -3x & -13\end{pmatrix}$, $B(x)\cdot A=\begin{pmatrix}x+3 & -3x-12\\ x+4 & -3x-16\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}-2x & -9\\ -3x & -13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3 & -3x-12\\ x+4 & -3x-16\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=-1$	**2p**
c)	$aA+B(a)=\begin{pmatrix}2a & -3a+3\\ 2a & -4a+4\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(aA+B(a)\right)=-2a^2+2a$, unde a este număr real	**3p**
	$-2a^2+2a=0$, de unde obținem $a=0$ sau $a=1$	**2p**
2.a)	$2*(-1)=2^2+2\cdot(-1)+(-1)^2=$	**3p**
	$=4-2+1=3$	**2p**
b)	$x*y=x^2+xy+y^2=y^2+yx+x^2=$	**3p**
	$=y*x$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă	**2p**

c)	$n^2+n^2+n^2=48 \Leftrightarrow n^2=16$ $n=-4$, care nu convine; $n=4$, care convine	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=6x-1-\frac{5}{x}=$ $=\frac{6x^2-x-5}{x}=\frac{(x-1)(6x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+5\ln x}{xf'(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-x+1}{(x-1)(6x+5)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(6+\frac{5}{x}\right)}=$ $=\frac{3}{1\cdot 6}=\frac{1}{2}$	**3p** **2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ și $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,1]$, $f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $x\in[1,+\infty)$ $f(x)\ge f(1)\Leftrightarrow f(x)\ge 3$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, de unde obținem $3x^2-x-2\ge 5\ln x$, deci $3x^2-x-2\ge\ln\left(x^5\right)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_{-1}^{2}(x+2)f(x)dx=\int_{-1}^{2}\left(x^2+1\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\right\|_{-1}^{2}=$ $=\frac{14}{3}+\frac{4}{3}=6$	**3p** **2p**
b)	$\int_{0}^{4}\left(f(x)-\frac{x^2}{x+2}\right)dx=\int_{0}^{4}\frac{1}{x+2}dx=\left.\ln(x+2)\right\|_{0}^{4}=$ $=\ln 6-\ln 2=\ln 3$	**3p** **2p**
c)	$\int_{0}^{6}(x-3)(x+3)\frac{x^2+2x+2}{x+3}dx=\int_{0}^{6}\left(x^3-x^2-4x-6\right)dx=\left.\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-2x^2-6x\right)\right\|_{0}^{6}=144$ $n^2=144$ și, cum n este număr natural, obținem $n=12$	**3p** **2p**