Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Testul 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Arătați că $2\cdot 8{,}5+10{,}5:3{,}5=20$.
5p	**2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(2,-2)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+a+1$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $10^{6-2x}=100^2$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $M=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$, numărul $\sqrt{10n}$ să fie rațional.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2)$ și $B(3,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că dreptele OA și AB sunt perpendiculare.
5p	**6**. Se consideră triunghiul ABC cu $AB=12$, $BC=8$ și unghiul C de măsură egală cu $30°$. Calculați $\sin A$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-4 & -5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Arătați că $\det B=-4$.
5p	**b)** Determinați numărul real a pentru care $A\cdot A-B\cdot B=a(A+B)$.
5p	**c)** Arătați că, pentru orice număr real x, matricea $C(x)=xA+2B$ este inversabilă.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=(2x-1)(2y-1)+\frac{1}{2}$.
5p	**a)** Arătați că $2*\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.
5p	**b)** Determinați numărul real x pentru care $(4x)*\frac{1}{4}=25$.
5p	**c)** Calculați $1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{1}{4}*\frac{1}{5}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{4}{x+3}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)^2}$, $x\in(-3,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $x^2+f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in(-3,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(2x-1)(x+1)$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^5 \frac{f(x)}{x+1}dx=20$.
5p	**b)** Calculați $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}dx$.
5p	**c)** Determinați numărul real a, $a\in\left[\frac{1}{2},2\right)$, știind că $\int_a^2 f'(x)\sqrt{f(x)}dx=18$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2\cdot 8,5+10,5:3,5=17+105:35=$	**2p**
	$=17+3=20$	**3p**
2.	$f(2)=-2\Rightarrow -6+a+1=-2$	**3p**
	$a=3$	**2p**
3.	$10^{6-2x}=10^4\Leftrightarrow 6-2x=4$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea $M=\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$ are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	Numerele $n\in M$ pentru care numărul $\sqrt{10n}$ este rațional sunt 10, 40 și 90, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$	**1p**
5.	$m_{OA}=-2$, $m_{AB}=\dfrac{a-2}{4}$	**2p**
	$m_{OA}\cdot m_{AB}=-1\Leftrightarrow -2\cdot\dfrac{a-2}{4}=-1$, de unde obținem $a=4$	**3p**
6.	$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin A}\Leftrightarrow\dfrac{12}{\frac{1}{2}}=\dfrac{8}{\sin A}$	**3p**
	$\sin A=\dfrac{8\cdot\frac{1}{2}}{12}=\dfrac{1}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det B=\begin{vmatrix}1 & 6\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-1\cdot 6=$	**3p**
	$=2-6=-4$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}16 & 15\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B\cdot B=\begin{pmatrix}7 & 18\\ 3 & 10\end{pmatrix}$, $A\cdot A-B\cdot B=\begin{pmatrix}9 & -3\\ -3 & -9\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=-3\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=-3(A+B)$, deci $a=-3$	**2p**
c)	$C(x)=\begin{pmatrix}-4x+2 & -5x+12\\ 2 & x+4\end{pmatrix}\Rightarrow\det(C(x))=-4x^2-4x-16$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\det(C(x))=-(2x+1)^2-15<0$, deci $\det(C(x))\neq 0$ adică matricea $C(x)$ este inversabilă pentru orice număr real x	**3p**

2.a)	$2*\frac{1}{2}=(2\cdot 2-1)\left(2\cdot\frac{1}{2}-1\right)+\frac{1}{2}=$	**3p**
	$=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$	**2p**
b)	$(4x)*\frac{1}{4}=\frac{2-8x}{2}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\frac{2-8x}{2}=25$, de unde obținem $x=-6$	**2p**
c)	$x*\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}*y=\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$\left(1*\frac{1}{2}\right)*\frac{1}{3}*\frac{1}{4}*\frac{1}{5}=\frac{1}{2}*\left(\frac{1}{3}*\frac{1}{4}*\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1+\frac{-4}{(x+3)^2}=$	**3p**
	$=\frac{(x+3)^2-4}{(x+3)^2}=\frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)^2}$, $x\in(-3,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x(x+3)}\right)=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x+3}=0$, deci dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică la graficul funcției f	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ și $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-3,-1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-3,-1]$, $f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[-1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $x\in[-1,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\ge f(-1)\Leftrightarrow f(x)\ge 1$, pentru orice $x\in(-3,+\infty)$ și, cum $x^2\ge 0$, obținem $x^2+f(x)\ge 1$, pentru orice $x\in(-3,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_1^5\frac{(2x-1)(x+1)}{x+1}dx=\int_1^5(2x-1)dx=\left(x^2-x\right)\Big\vert_1^5=$	**3p**
	$=20-0=20$	**2p**
b)	$\int_1^2\frac{2x^2+x-1}{x^2}dx=\int_1^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left(2x+\ln x+\frac{1}{x}\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=\frac{3}{2}+\ln 2$	**2p**
c)	$\int_a^2 f'(x)\sqrt{f(x)}\,dx=\frac{2f(x)\sqrt{f(x)}}{3}\Big\vert_a^2=18-\frac{2f(a)\sqrt{f(a)}}{3}$	**3p**
	$f(a)=0$ și, cum a este număr real cu $a\in\left[\frac{1}{2},2\right)$, obținem $a=\frac{1}{2}$	**2p**