Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Testul 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Calculați termenul al cincilea al unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, în care $b_1=3$ și $b_2=-6$.
5p	**2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $2x^2-6x+1=0$. Arătați că $x_1+x_2-6x_1x_2=0$.
5p	**3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuația $2+\sqrt[3]{27x+8}=1$.
5p	**4.** După o scumpire cu 15%, un produs costă 92 de lei. Determinaţi preţul produsului înainte de scumpire.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,0)$ și $B(9,a)$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care distanța dintre punctele A și B este egală cu 13.
5p	**6**. Se consideră triunghiul ABC cu $AB=AC=14$ și unghiul B de măsură egală cu $75°$. Determinați aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x&x-2\\1&2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=3$.
5p	**b)** Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1)=3(A(x)-I_2)$.
5p	**c)** Arătați că $\det\left(xA(x)-A\left(x^2\right)\right)\geq 0$, pentru orice număr real x.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3xy-\dfrac{x+y}{3}+1$.
5p	**a)** Arătați că $1*5=14$.
5p	**b)** Determinați numărul real x pentru care $3*x=-52$.
5p	**c)** Determinați numerele naturale n pentru care $n*(0*(3n))\geq\dfrac{2n}{3}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x^3-6x^2+18x-49$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=-6(x-1)(x+3)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
5p	**c)** Se consideră punctele $A(-2,f(-2))$ și $B(0,f(0))$. Arătați că tangentele la graficul funcției f în punctele A și B au pantele egale.
	2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\ln x-2$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^3(f(x)-\ln x)dx=0$.
5p	**b)** Calculați $\int_1^e(f(x)-x+2)dx$.
5p	**c)** Demonstrați că orice primitivă $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f este convexă.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Testul 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Rația progresiei geometrice este $q=-2$	**2p**
	$b_5=b_1q^4=3\cdot(-2)^4=48$	**3p**
2.	$x_1+x_2=3$, $x_1x_2=\frac{1}{2}$	**2p**
	$x_1+x_2-6x_1x_2=3-6\cdot\frac{1}{2}=3-3=0$	**3p**
3.	$\sqrt[3]{27x+8}=-1\Leftrightarrow 27x+8=-1$	**3p**
	$x=-\frac{1}{3}$	**2p**
4.	$x+\frac{15}{100}\cdot x=92$, unde x este prețul produsului înainte de scumpire	**3p**
	$x=80$ de lei	**2p**
5.	$AB=\sqrt{144+a^2}$	**2p**
	$\sqrt{144+a^2}=13$, de unde obținem $a=-5$ sau $a=5$, care convin	**3p**
6.	Unghiul A are măsura egală cu $30°$, deci $\sin A=\frac{1}{2}$	**2p**
	$\mathcal{A}=\frac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}=\frac{14\cdot 14\cdot\frac{1}{2}}{2}=49$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}1&-1\\1&2\end{vmatrix}=1\cdot 2-(-1)\cdot 1=$	**3p**
	$=2+1=3$	**2p**
b)	$A(x)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}2x-2&x-4\\3&3\end{pmatrix}$ și $3(A(x)-I_2)=\begin{pmatrix}3x-3&3x-6\\3&3\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}2x-2&x-4\\3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x-3&3x-6\\3&3\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=1$	**2p**
c)	$xA(x)-A(x^2)=\begin{pmatrix}x^2&x^2-2x\\x&2x\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x^2&x^2-2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2x+2\\x-1&2x-2\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\det(xA(x)-A(x^2))=0-(-2x+2)(x-1)=2(x-1)^2\geq 0$, pentru orice număr real x	**3p**
2.a)	$1*5=3\cdot 1\cdot 5-\frac{1+5}{3}+1=$	**3p**
	$=15-2+1=14$	**2p**

b)	$3*x=9x-\frac{3+x}{3}+1=\frac{26x}{3}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\frac{26x}{3}=-52$, de unde obținem $x=-6$	**2p**
c)	$0*(3n)=-n+1\Rightarrow n*(0*(3n))=n*(-n+1)=\frac{-9n^2+9n+2}{3}$, pentru orice număr natural n	**2p**
	$\frac{-9n^2+9n+2}{3}\geq\frac{2n}{3}\Leftrightarrow -9n^2+7n+2\geq 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n=0$ sau $n=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-6x^2-12x+18=$	**3p**
	$=-6\left(x^2+2x-3\right)=-6(x-1)(x+3)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-3$ sau $x=1$	**2p**
	$x\in(-\infty,-3]\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty,-3]$, $x\in[-3,1]\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-3,1]$, $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[1,+\infty)$	**3p**
c)	Panta tangentei la graficul funcției f în punctul $A(-2,f(-2))$ este $f'(-2)=-6\cdot(-3)\cdot 1=18$	**2p**
	Panta tangentei la graficul funcției f în punctul $B(0,f(0))$ este $f'(0)=-6\cdot(-1)\cdot 3=18$, deci tangentele la graficul funcției f în punctele A și B au pantele egale	**3p**
2.a)	$\int_1^3 (f(x)-\ln x)dx=\int_1^3 (x-2)dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\right\vert_1^3=$	**3p**
	$=\frac{9}{2}-6-\left(\frac{1}{2}-2\right)=0$	**2p**
b)	$\int_1^e (f(x)-x+2)dx=\int_1^e \ln x dx=\left.(x\ln x-x)\right\vert_1^e=$	**3p**
	$=0-(-1)=1$	**2p**
c)	F este primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$F''(x)=f'(x)=1+\frac{1}{x}\geq 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este convexă	**3p**