

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

Testul 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $\frac{1}{\sqrt{5}-2} - \sqrt{5} = 2$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 5x + 2$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) = a$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3 \log_4(3x+1) = 6$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr x din mulțimea $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, numărul x^2 să fie număr impar.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, -1)$, $B(4, 3)$ și $C(a, b)$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a , b , știind că punctul A este mijlocul segmentului BC .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $AB = 9$ și $AC = 12$. Determinați lungimea înălțimii din A a triunghiului ABC .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Arătați că $\det A = 2$.
- 5p** b) Arătați că $(A - 2I_2) \cdot (A - 4I_2) = 6I_2$.
- 5p** c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A \cdot X = 3A + 4X$.
2. Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = xy - \frac{12}{x+y} + \frac{3}{x} + \frac{3}{y}$.
- 5p** a) Arătați că $1 * 3 = 4$.
- 5p** b) Arătați că $x * x = x^2$, pentru orice $x \in M$.
- 5p** c) Determinați numărul natural nenul n pentru care $(n * n) * (n * n) = 1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{x^2 - 2x + 2}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{4(1-x)}{(x^2 - 2x + 2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 2$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Determinați numărul real a pentru care $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2 + 1} + 1, & x \in (-\infty, 0] \\ e^x, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^4 f(x) dx = e(e^3 - 1)$.

5p b) Calculați $\int_1^2 xf(x) dx$.

5p c) Determinați numărul real a , $a > 0$, știind că $\int_{-a}^0 f(x) dx = a - \ln(a+1)$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\frac{1}{\sqrt{5}-2} - \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5})^2-4} - \sqrt{5} =$ $= \sqrt{5}+2 - \sqrt{5} = 2$	3p 2p
2.	$f(a) = 2a^2 + 5a + 2 \Rightarrow 2a^2 + 5a + 2 = a$ $2a^2 + 4a + 2 = 0$, de unde obținem $a = -1$	2p 3p
3.	$\log_4(3x+1) = 2 \Rightarrow 3x+1 = 4^2 \Rightarrow 3x+1 = 16$ $x = 5$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea A are 6 elemente, deci sunt 6 cazuri posibile Numerele $x \in A$ pentru care x^2 este număr impar sunt 5, 7 și 9, deci sunt 3 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	2p 2p 1p
5.	Mijlocul segmentului BC are coordonatele $\frac{4+a}{2}$, respectiv $\frac{3+b}{2} \Rightarrow 2 = \frac{4+a}{2}$, deci $a = 0$ $-1 = \frac{3+b}{2} \Rightarrow b = -5$	3p 2p
6.	$BC = 15$ $h = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{9 \cdot 12}{15} = 7,2$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 =$ $= 8 - 6 = 2$	3p 2p
b)	$(A - 2I_2) \cdot (A - 4I_2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I_2$	2p 3p
c)	$A \cdot X = \begin{pmatrix} 4a+2c & 4b+2d \\ 3a+2c & 3b+2d \end{pmatrix}$ și $3A+4X = \begin{pmatrix} 12+4a & 6+4b \\ 9+4c & 6+4d \end{pmatrix}$, unde $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, cu a, b, c și d numere reale $\begin{pmatrix} 4a+2c & 4b+2d \\ 3a+2c & 3b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+4a & 6+4b \\ 9+4c & 6+4d \end{pmatrix}$, deci $a = 7, b = 4, c = 6$ și $d = 3$, de unde obținem $X = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$	3p 2p

2.a)	$1*3=1\cdot 3-\frac{12}{1+3}-\frac{3}{1}+\frac{3}{3}=$ $=3-3+3+1=4$	3p 2p
b)	$x*x=x\cdot x-\frac{12}{x+x}+\frac{3}{x}+\frac{3}{x}=$ $=x^2-\frac{6}{x}+\frac{3}{x}+\frac{3}{x}=x^2-\frac{6}{x}+\frac{6}{x}=x^2, \text{ pentru orice } x \in M$	2p 3p
c)	$n*n=n^2, (n*n)*(n*n)=n^2*n^2=n^4, \text{ pentru orice număr natural nenul } n$ $n^4=1$ și, cum n este număr natural nenul, obținem $n=1$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x)=\frac{0-2(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}=\frac{4-4x}{(x^2-2x+2)^2}=$ $=\frac{4(1-x)}{(x^2-2x+2)^2}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$f(2)=1, f'(2)=-1$ Ecuația tangentei este $y-f(2)=f'(2)(x-2)$, adică $y=-x+3$	2p 3p
c)	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a), \text{ pentru orice număr real } a$ $f'(a)=0 \Leftrightarrow \frac{4(1-a)}{(a^2-2a+2)^2}=0, \text{ de unde obținem } a=1$	2p 3p
2.a)	$\int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 e^x dx = e^x \Big _1^4 =$ $= e^4 - e = e(e^3 - 1)$	3p 2p
b)	$\int_1^2 xf(x) dx = \int_1^2 xe^x dx = \int_1^2 x(e^x)' dx = (xe^x - e^x) \Big _1^2 =$ $= e^2 - 0 = e^2$	3p 2p
c)	Cum a este număr real, $a > 0$, obținem $\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_{-a}^0 \left(\frac{2x}{x^2+1} + 1 \right) dx =$ $= \int_{-a}^0 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx + \int_{-a}^0 1 dx = \ln(x^2+1) \Big _{-a}^0 + x \Big _{-a}^0 = -\ln(a^2+1) + a$ $a - \ln(a^2+1) = a - \ln(a+1) \Rightarrow a^2 = a$ și, cum $a > 0$, obținem $a=1$	3p 2p