

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

Testul 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați suma primilor patru termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ în care $a_2 = 5$ și $a_3 = 8$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 8$. Determinați numerele reale a pentru care $a \cdot f(a) = f(1)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(25 - x) = \log_5(x + 5)$.
- 5p** 4. Determinați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu cifre din mulțimea $A = \{2, 3, 5, 9\}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y = 2x + a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a știind că punctul $A(2, 3)$ aparține dreptei d .
- 5p** 6. Arătați că $4 \sin 60^\circ (\operatorname{tg} 60^\circ - \cos 30^\circ) = 3$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(a) = \begin{pmatrix} a & a \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det A = -5$.
- 5p** b) Determinați numărul real a pentru care $B(1) \cdot B(-1) + 3A = 4B(a)$.
- 5p** c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X \cdot (A - 2I_2) = B(0)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = (2x - y + 1)(2y - x + 1)$.
- 5p** a) Arătați că $3 * 4 = 18$.
- 5p** b) Demonstrați că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă.
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale pentru care $(2m) * n = 13$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-5, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x + 7}{x + 5}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{3}{(x + 5)^2}$, $x \in (-5, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 3x + 5$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^3 (f(x) + 2\sqrt{x}) dx = 8$.
- 5p** b) Arătați că funcția f este o primitivă a funcției $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$.
- 5p** c) Calculați $\int_1^2 \frac{1}{f(x^2)} dx$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$r = 3 \Rightarrow a_1 = 2, a_4 = 11$ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2 + 5 + 8 + 11 = 26$	3p 2p
2.	$f(a) = 3a - 8, f(1) = -5$ $a(3a - 8) = -5 \Leftrightarrow 3a^2 - 8a + 5 = 0$, de unde obținem $a = 1$ sau $a = \frac{5}{3}$	2p 3p
3.	$25 - x = x + 5$ $x = 10$, care convine	2p 3p
4.	Cifra unităților poate fi aleasă în 4 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor poate fi aleasă în câte 3 moduri, deci se pot forma $4 \cdot 3 = 12$ numere	2p 3p
5.	$3 = 2 \cdot 2 + a$ $a = -1$	3p 2p
6.	$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $4 \sin 60^\circ (\operatorname{tg} 60^\circ - \cos 30^\circ) = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1) =$ $= -6 + 1 = -5$	3p 2p
b)	$B(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, B(-1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow B(1)B(-1) + 3A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 15 & 33 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 12 & 24 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 12 & 24 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} a & a \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, de unde obținem $a = 2$	3p 2p
c)	$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - 2I_2) = 1$, deci matricea $A - 2I_2$ este inversabilă și $(A - 2I_2)^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $X = B(0) \cdot (A - 2I_2)^{-1}$, de unde obținem $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$	3p 2p
2.a)	$3 * 4 = (2 \cdot 3 - 4 + 1)(2 \cdot 4 - 3 + 1) =$ $= 3 \cdot 6 = 18$	3p 2p
b)	$x * y = (2x - y + 1)(2y - x + 1) = (2y - x + 1)(2x - y + 1) =$	2p

	$= y * x$, pentru orice numere reale x și y , deci legea de compoziție „*” este comutativă	3p
c)	$(2m) * n = (4m - n + 1)(2n - 2m + 1)$, pentru orice numere naturale m și n	2p
	$(4m - n + 1)(2n - 2m + 1) = 13$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem perechile $(2, 8)$ sau $(4, 4)$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{2(x+5) - (2x+7)}{(x+5)^2} =$	3p
	$= \frac{2x+10-2x-7}{(x+5)^2} = \frac{3}{(x+5)^2}, x \in (-5, +\infty)$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+7}{x+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 + \frac{7}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{5}{x}\right)} =$	2p
	$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{7}{x}}{1 + \frac{5}{x}} = 2$, deci dreapta de ecuație $y = 2$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p
c)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a, f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 3x + 5 \Leftrightarrow f'(a) = 3, a \in (-5, +\infty)$	2p
	$\frac{3}{(a+5)^2} = 3$ și, cum $a \in (-5, +\infty)$, obținem $a = -4$	3p
2.a)	$\int_1^3 (f(x) + 2\sqrt{x}) dx = \int_1^3 (x+2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big _1^3 =$	3p
	$= \frac{21}{2} - \frac{5}{2} = 8$	2p
b)	$f'(x) = (x - 2\sqrt{x} + 2)' = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 =$	3p
	$= 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} = g(x)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția f este o primitivă a funcției g	2p
c)	$\int_1^2 \frac{1}{f(x^2)} dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx = \int_1^2 \frac{(x-1)'}{(x-1)^2 + 1} dx = \arctg(x-1) \Big _1^2 =$	3p
	$= \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4}$	2p