Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*

Testul 11

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = -2$ și $a_3 = 4$. Calculați termenul a_4.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = ax + 2$, unde a este număr real nenul. Determinați numărul real a pentru care graficul funcției f intersectează axa Ox în punctul $A(2,0)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_8(7x+8) = 2$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale nenule de o cifră, numărul $2n$ să fie număr natural de două cifre.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,2)$, $B(2,5)$ și $C(5,1)$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, cu $AB = 17$, $AC = 10$ și înălțimea $AD = 8$, unde punctul D aparține laturii BC. Determinați lungimea laturii BC a triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Pe mulțimea $M = [0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \dfrac{x+y+6}{xy+1}$.

5p **1.** Arătați că $1 * 2 = 3$.

5p **2.** Arătați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.

5p **3.** Arătați că $x * 1 > 1$, pentru orice $x \in M$.

5p **4.** Determinați numărul $x \in M$ pentru care $3 * x = \dfrac{1}{2}$.

5p **5.** Determinați $x \in M$ pentru care $x * x \geq 2$.

5p **6.** Determinați perechile (m,n) de numere naturale, cu $m < n$, pentru care $m * n = 1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **1.** Arătați că $\det A = -4$.

5p **2.** Arătați că $B(-6) + 3B(2) = 4B(0)$.

5p **3.** Arătați că $B(2)\cdot B(-2) - A = 4I_2$.

5p **4.** Arătați că $\det\big(B(2x) + xA\big) = 0$, pentru orice număr real x.

5p **5.** Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $B(1)\cdot X = A$.

5p **6.** Determinați perechile (m,n) de numere întregi, $m \leq n$, pentru care $\det\big(B(m)\cdot B(n) + mnI_2\big) = 4$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 11

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2r = a_3 - a_1$, de unde obținem $r = 3$	**3p**
	$a_4 = 7$	**2p**
2.	$f(2) = 0$	**2p**
	$2a + 2 = 0$, de unde obținem $a = -1$	**3p**
3.	$\log_8(7x+8) = 2 \Rightarrow 7x + 8 = 8^2 \Rightarrow 7x + 8 = 64$	**3p**
	$x = 8$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale nenule de o cifră are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale n, nenule, de o cifră, pentru care $2n$ este număr natural de două cifre sunt 5, 6, 7, 8 și 9, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{5}{9}$	**1p**
5.	$AB = 5$, $BC = 5$, deci triunghiul ABC este isoscel	**2p**
	$AC = \sqrt{50}$, de unde obținem $AC^2 = AB^2 + BC^2$, deci triunghiul este dreptunghic isoscel	**3p**
6.	Cum triunghiul ADB este dreptunghic, rezultă că $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = 15$	**2p**
	Cum triunghiul ADC este dreptunghic, rezultă că $DC = \sqrt{AC^2 - AD^2} = 6$ și, cum $BC = BD + DC$, obținem $BC = 21$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$1 * 2 = \dfrac{1+2+6}{1 \cdot 2 + 1} =$	**3p**
	$= \dfrac{9}{3} = 3$	**2p**
2.	$x * y = \dfrac{x+y+6}{xy+1} = \dfrac{y+x+6}{yx+1} =$	**3p**
	$= y * x$, pentru orice numere x și y din mulțimea M, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă	**2p**
3.	$x * 1 = \dfrac{x+1+6}{x+1} =$	**2p**
	$= 1 + \dfrac{6}{x+1} > 1$, pentru orice $x \in M$	**3p**
4.	$3 * x = \dfrac{x+9}{3x+1}$, pentru orice $x \in M$	**2p**
	$\dfrac{x+9}{3x+1} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x + 18 = 3x + 1$, de unde obținem $x = 17$, care convine	**3p**

5.	$x*x=\dfrac{2x+6}{x^2+1}$, pentru orice $x\in M$	**2p**
	$\dfrac{2x+6}{x^2+1}\geq 2 \Leftrightarrow x^2-x-2\leq 0$ și, cum $x\in M$, obținem $x\in[0,2]$	**3p**
6.	$m*n=1\Leftrightarrow \dfrac{m+n+6}{mn+1}=1\Leftrightarrow mn-m-n+1=6$, unde m și n sunt numere naturale	**2p**
	$(m-1)(n-1)=6$ și, cum m și n sunt numere naturale cu $m<n$, obținem perechile $(2,7)$ și $(3,4)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$\det A=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 0\end{vmatrix}=1\cdot 0-(-2)\cdot(-2)=$	**3p**
	$=0-4=-4$	**2p**
2.	$B(-6)=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 6 & 0\end{pmatrix}$, $B(2)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow B(-6)+3B(2)=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=4B(0)$	**2p**
3.	$B(-2)=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow B(2)\cdot B(-2)-A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=4I_2$	**2p**
4.	$B(2x)=\begin{pmatrix}1 & 2x\\ -2x & 0\end{pmatrix}\Rightarrow B(2x)+xA=\begin{pmatrix}1+x & 0\\ -4x & 0\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\det(B(2x)+xA)=(1+x)\cdot 0-(-4x)\cdot 0=0$, pentru orice număr real x	**2p**
5.	$B(1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(B(1))=1$, deci matricea $B(1)$ este inversabilă și inversa ei este $(B(1))^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=(B(1))^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -2\end{pmatrix}$	**2p**
6.	$B(m)\cdot B(n)=\begin{pmatrix}1-mn & n\\ -m & -mn\end{pmatrix}\Rightarrow B(m)\cdot B(n)+mnI_2=\begin{pmatrix}1 & n\\ -m & 0\end{pmatrix}$, de unde obținem $\det(B(m)\cdot B(n)+mnI_2)=mn$, pentru orice numere întregi m și n	**3p**
	$mn=4$ și, cum m și n sunt numere întregi cu $m\leq n$, obținem $(-4,-1)$, $(-2,-2)$, $(1,4)$ și $(2,2)$	**2p**