

BINOMULUI LUI NEWTON. NUMĂRUL  
DE TERMENILOR RAȚIONALI (IRRAȚIONALI)

Găsiți numărul termenilor raționali și irraționali din dezvoltările:

1)  $(\sqrt[3]{5} + 1)^{243}$

2)  $(\sqrt[7]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}})^{501}$

3)  $(\sqrt{5} + \sqrt[4]{3})^{400}$

4)  $(1 + \sqrt[5]{7})^{381}$

5)  $(\sqrt[5]{4} + \frac{1}{\sqrt{2}})^{483}$

6)  $(\sqrt{7} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}})^{800}$

7)  $(\sqrt[5]{2} + \frac{1}{\sqrt{2}})^{901}$

8)  $(\sqrt[5]{3} - \sqrt[2]{5})^{100}$

9)  $(3 + \sqrt[3]{3})^{502}$

10)  $(\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[7]{3}} + \sqrt[3]{5})^{400}$

11)  $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[5]{3})^{700}$

Fie  $(\sqrt[3]{5} + 1)^{243}$ , n ce n. termenilor  
rationali si irationali

$$E_1) T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k \Rightarrow T_{k+1} = C_{243}^k (5^{\frac{1}{3}})^{243-k} 1^k$$

$$\Rightarrow T_{k+1} = C_{243}^k 5^{\frac{243-k}{3}}$$

E<sub>2</sub>) term. rationali:

$$T_{k+1} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \frac{243-k}{3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0, 3, \dots, 243\}$$

E<sub>3</sub>) obs. ca valorile lui k sunt in progres  
aritm. cu  $a_1 = 0$ ,  $a_n = 243$  si  $r = 3$

$$E_4) a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 243 = 0 + (n-1)3$$

$$243 = 3n - 3 \Rightarrow 3n = 246 \Rightarrow n = 82$$

E<sub>5</sub>) sunt in total n+1 termeni adica

sunt 244

sunt rationali 82  $\Rightarrow$  irationali sunt

$$244 - 82 = 162$$

Găsiți numărul de termeni raționali și irraționali  
din  $(\sqrt[7]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}})^{501}$

$$E_1) T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k \Rightarrow T_{k+1} = C_{501}^k (\sqrt[7]{2})^{501-k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^k$$

$$T_{k+1} = C_{501}^k (2^{\frac{1}{7}})^{501-k} \cdot (5^{-\frac{1}{3}})^k = C_{501}^k \cdot 2^{\frac{501-k}{7}} \cdot 5^{-\frac{k}{3}}$$

$$E_2) T_{k+1} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{501-k}{7} \in \mathbb{Z} \\ -\frac{k}{3} \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ cu } k \in \{0, 1, \dots, 501\}$$

$$E_3) \frac{501-k}{7} \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{4, 11, 18, \dots, 501\} = M_1$$

$$-\frac{k}{3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0, 3, 6, \dots, 501\} = M_2$$

$$E_4) k \in M_1 \cap M_2 = \{18, 39, \dots, 501\}$$

des. că elementele sunt în progresiune aritmetică cu  $a_1 = 18, a_n = 501$   
și  $r = 21 \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 501 = 18 + (n-1) \cdot 21$

$$483 = 21n - 21 \Rightarrow 483 + 21 = 21n \Rightarrow 504 = 21n$$

$$\Rightarrow n = \frac{504}{21} = \frac{168}{7} = 24$$

$\Rightarrow$  sunt 24 termeni raționali

$E_5)$  At a găsi nr. termenilor irraționali  
sunt în total  $n+1$  termeni  $\Rightarrow 502$  din care  
scad pe cei raționali  $\Rightarrow 502 - 24 = 478$   
irraționali

Găsiti

3

$$(\sqrt{5} + \sqrt[4]{3})^{400}$$

$$E_1) T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} \cdot b^k \Rightarrow T_{k+1} = C_{400}^k \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{400-k} \cdot \left(3^{\frac{1}{4}}\right)^k$$
$$\Rightarrow T_{k+1} = C_{400}^k 5^{\frac{400-k}{2}} \cdot 3^{\frac{k}{4}}$$

$$E_2) T_{k+1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \begin{cases} \frac{400-k}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0, 2, 4, \dots, 400\} = M_1 \\ \frac{k}{4} \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0, 4, 8, \dots, 400\} = M_2 \end{cases}$$

$$E_3) k \in M_1 \cap M_2 = \{0, 4, \dots, 400\}$$

$E_4)$  este o anum. progr. aritm. cu  $a_1 = 0$ ,  $a_n = 400$

$$\text{si } r = 4, \text{ folosim } a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$\Rightarrow 400 = 0 + (n-1) \cdot 4 \Rightarrow 400 = 4n - 4$$

$$404 = 4n \Rightarrow n = 101$$

$E_5)$  avem 101 term. irationali si in total 401 termeni  
 $\Rightarrow$  irationali:  $401 - 101 \Rightarrow 300$  irationali

Se e (  $\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[7]{3}} + \sqrt[3]{5}$  )<sup>400</sup>, n cere n. de termeni rationali si irationali

$$E_1) T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k = C_{400}^k \left(\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[7]{3}}\right)^{400-k} (\sqrt[3]{5})^k =$$

$$= C_{400}^k \left(2^{\frac{1}{5}} \cdot 3^{-\frac{1}{7}}\right)^{400-k} \cdot \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^k =$$

$$= C_{400}^k 2^{\frac{400-k}{5}} \cdot 3^{-\frac{400-k}{7}} \cdot 5^{\frac{k}{3}}$$

$$E_2) T_{k+1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \begin{cases} \frac{400-k}{5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0, 5, 10, 15, \dots, 400\} = M_1 \\ \frac{400-k}{7} \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{1, 8, 15, \dots, 400\} = M_2 \\ \frac{k}{3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0, 3, 6, \dots, 399\} = M_3 \end{cases}$$

$$E_3) k \in M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \{15, \dots\} \text{ nu ne dam suma exact}$$

$$E_4) c.m.m.m.c. (5, 7, 3) = 105$$

$$\Rightarrow k \in M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \{15, 120, 225, 330, 435\}$$

$$\Rightarrow k \in \{15, 120, 225, 330\}$$

⇒ 4 termeni rationali

$$E_5) \text{ în total sunt } 401 \text{ termeni} \Rightarrow 401 - 4 = 397 \text{ irationali}$$

Fie  $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[5]{3})^{700}$ , câți termeni  
raționali și câți irraționali sunt?

$$E_1) T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k \Rightarrow T_{k+1} = C_{700}^k (\sqrt[3]{2})^{700-k} (\sqrt[5]{3})^k$$

$$T_{k+1} = C_{700}^k 2^{\frac{700-k}{3}} \cdot 3^{\frac{k}{5}}, \quad k = \overline{0, 700}$$

$$E_2) T_{k+1} \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{700-k}{3} \in \mathbb{Z} \\ \frac{k}{5} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \in \{1; 4; 7; \dots; 700\} = M_1 \\ k \in \{0; 5; 10; \dots; 700\} = M_2 \end{cases}$$

$$E_3) k \in M_1 \cap M_2 = \{10; 25; \dots; 700\}$$

$E_4)$  obs. că progr aritm cu  $a_1 = 10$ ,  $a_n = 700$ , și

$$r = 15 \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 700 = 10 + (n-1) \cdot 15$$

$$690 = (n-1)15 \Rightarrow n-1 = \frac{690}{15} = 46 \Rightarrow n = 47 \Rightarrow 47 \text{ raționali}$$

$E_5)$   $\forall$  binom  $(a+b)^n$  are  $n+1$  termeni, în  
cerul nostru are 701 termeni

$$E_6) \text{ irraționali sunt } 701 - 47 = 654$$