REZOLVAREA SISTEMELOR LINIARE ÎN CAZ GENERAL

Rezolvați următoarele sisteme:

1) $\begin{cases} 2x+y=2 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+2y+z=-4 \\ x-2y+z=-1 \\ -2x+4y-2z=2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+3y-z+t=4 \\ 2x+3y+z-t=5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x+y-z+3t=5 \\ x+y-z+t=2 \\ 5x+3y-3z+7t=12 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x-y+3z+t=-8 \\ 3x+y-z+2t=-5 \\ 2x+2y-4z+t=3 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 2x-2y-z=0 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+4y+2z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x-y-4z=6 \\ 2x-y-4z=6 \\ -x-y+z=2 \end{cases}$

Rezolvați: $\begin{cases} 2x+y=2 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

E1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \bar{A}=\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{2} & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

E2) $\det A = 2-2=0 \Rightarrow$ nu pot aplica CRAMER

E3) rang $A = ?$, $|2| = 2 \neq 0 \Rightarrow$ rang $A \geq 1$, bordăm

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2-2=0 \Rightarrow \nexists$ alt determinant de ord II obținut prin bordare $\Rightarrow$ rang $A=1$, $\Delta_p = |2| = 2$

E4) calc. $\Delta_c = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2-4=-2 \neq 0 \Rightarrow \exists \Delta_c \neq 0$

$\Rightarrow$ sist. incompatibil

Obs.: în loc de metoda cu Δ_c, calculăm rang $\bar{A}$, în $\bar{A}$ există $|2| = 2 \neq 0 \Rightarrow$ rang $\bar{A} \geq 1$, bordăm $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, bordăm altfel $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \text{rang } \bar{A} \geq 2. \\ \text{Dar, } \bar{A} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C}) \Rightarrow \text{rang } \bar{A} \leq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ rang $\bar{A} = 2$ și cum rang $A = 1$

$\Rightarrow$ rang $A \neq$ rang $\bar{A} \Rightarrow$ sist incompatibil

Rezolvați: $\begin{cases} x+2y+z=-4 \\ x-2y+z=-1 \\ -2x+4y-2z=2 \end{cases}$

E1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \end{array}\right)$

E2) $\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix}=4-4+4-4-4+4=0$

$\Rightarrow$ nu pot aplica CRAMER

E3) rang $A=?$, $|1|=1\neq 0 \Rightarrow$ rang $A\geq 1$, bordăm

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-2-2=-4\neq 0 \Rightarrow$ rang $A\geq 2$, bordăm

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix}=\det A=0$ și $\nexists$ altă bordare $\Rightarrow$ rang $A=2$

$\Delta_p=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

E4) $\Delta_c=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}=-4+4-16+16+4-4=0$

Deoarece $\nexists$ alt $\Delta_c \Rightarrow$ sist compatibil

E5) sist principal $\begin{cases} x+2y=-4-\alpha \\ x-2y=-1-\alpha \end{cases}$, not $\boxed{z=\alpha}$

„+": $2x=-5-2\alpha \Rightarrow \boxed{x=\frac{-5-2\alpha}{2}}$

„−": $4y=-3 \Rightarrow \boxed{y=-\frac{3}{4}}$

E6) sol sistemului $\begin{cases} x=\frac{-5-2\alpha}{2} \\ y=-\frac{3}{4} \\ z=\alpha \end{cases}$

Rezolvați: $\begin{cases} x - y + 3z + t = -8 \\ 3x + y - z + 2t = -5 \\ 2x + 2y - 4z + t = 3 \end{cases}$

E1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, A nu e pătratică

E2) rang $A = ?$, $|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow$ rang $A \geq 1$, bordăm

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4 \neq 0 \Rightarrow$ rang $A \geq 2$, bordăm

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 2 + 18 - 6 + 2 - 12 = 22 - 22 = 0$, bordăm altfel

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 - 4 - 2 - 4 + 3 = 10 - 10 = 0$

și cum $\nexists$ alt minor de ord III obținut prin bordare

$\Rightarrow$ rang $A = 2$, $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4$

E3) calc $\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -8 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 10 - 48 + 16 + 10 + 9 =$
$= 48 - 48 = 0$

$\nexists$ alt $\Delta_c \Rightarrow$ sist compatibil

E4) sist principal $\begin{cases} x - y = -8 - 3\alpha - \beta \\ 3x + y = -5 + \alpha - 2\beta \end{cases}$, $z = \alpha$, $t = \beta$

adun $\Rightarrow 4x = -13 - 2\alpha - 3\beta \Rightarrow \boxed{x = -\dfrac{13 + 2\alpha + 3\beta}{4}}$

$\begin{cases} x - y = -8 - 3\alpha - \beta \\ 3x + y = -5 + \alpha - 2\beta \end{cases} \Big| \cdot(-3)$

"+": $4y = 19 + 10\alpha + \beta \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{10\alpha + \beta + 19}{4}}$

$\boxed{z = \alpha,\ t = \beta}$

Rezolvați: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

E1) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, $\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{array}\right)$

E2) $\det A=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=1+1+1-1-1-1=0$

rang $A=?$, $|1|=1\neq 0 \Rightarrow$ rang $A\geq 1$, bordăm

$\Rightarrow \begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=1-1=0$, oricum altfel am borda avem

$\det\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{\text{rang } A=1} \Rightarrow \Delta_p=|1|$

E3) $\Delta_{c_1}=\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=1-1=0$ și $\Delta_{c_2}=\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=1-1=0$

$\Rightarrow$ toți $\Delta_c=0 \Rightarrow$ sist compatibil

E4) sistemul principal: $\{\, x=1-\alpha-\beta$, $\begin{matrix}y=\alpha\\ z=\beta\end{matrix}$