DISCUȚIA SISTEMELOR LINIARE

Rezolvați discutând în funcție de parametrii dați următoarele sisteme:

1) $\begin{cases} x - y - mz = 1 \\ x + my - z = 1 \\ mx - y - z = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 2 - m \\ x + y + mz = 3m + 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + my - z = 8 \\ 2x - y - 2z = 6 \\ mx + 2y + z = 4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x + my + 2z = 5 \\ x + 3y + 4z = 8 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x + my + z = 0 \\ 2x - (m+1)y - z = 0 \\ (m+1)x + y + z = 0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 3x + ay - z = -1 \\ 5x + 2y + (a-1)z = b \end{cases}$

7) $\begin{cases} ax + 2y + 2z = 1 \\ ax + 3y + 2z = 1 \\ ax + 2y + 5z = 2b - 1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x + y + z = b \\ x + ay + z = 2a \\ x + y + az = c \end{cases}$

9) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x - y + z = b \\ ax + y - 2z = 4 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x - y - 4z = 6 \\ 2x + my - 4z = 14 \\ ax - y + z = 2 \end{cases}$

---

11) Fie $\begin{cases} x - y - mz = 1 \\ mx + y + mz = 1 - m \\ mx + 3y + 3z = -1 \end{cases}$

Găsiți $m \in \mathbb{R}$ dacă sist. e incompatibil

---

12) $\begin{cases} ax + by + cz = b \\ cx + ay + bz = a \\ bx + cy + az = c \end{cases}$

Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, rezolv. sist. dacă știm că e compatibil determinat

13) $\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$

Se cere $m \in \mathbb{Z}$ dacă sist. are o soluție unică $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{Z}^3$

Discutați sistemul:

$$\begin{cases} x - y - mz = 1 \\ x + my - z = 1 \\ mx - y - z = 1 \end{cases}$$

$E_1)$ $\det S = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -m \\ 1 & m & -1 \\ m & -1 & -1 \end{vmatrix} = \cancel{-m} + \cancel{m} + m + m^3 - 1 - 1 =$
$= m^3 + m - 2$

$E_2)$

	m^3	m^2	m	m^0
	1	0	1	-2
1)	1	1	2	$\boxed{0}$

$\Rightarrow (m-1)(m^2+m+2) = 0$

$\Rightarrow m = 1$ sau $m^2 + m + 2 = 0$, $\Delta = -7 < 0$

$E_3)$ Caz I: $\det S \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1 \Rightarrow$ Cramer,

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -m \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \cancel{-m} + \cancel{1} + \cancel{m} + m^2 - \cancel{1} - 1 - 1 = m^2 - 1 \Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\det S} = \frac{m^2-1}{(m-1)(m^2+m+2)}$

$\Rightarrow x = \frac{m+1}{m^2+m+2}$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -m \\ 1 & 1 & -1 \\ m & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - m - m + m^2 + 1 + 1 = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{m-1}{m^2+m-2}$, analog $z = \ldots$

$E_4)$ Caz II: $\det S = 0 \Leftrightarrow m = 1$, înloc $\Rightarrow \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$

rang $A = ?$, $|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow$ rang $A \geq 1$, bordăm $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ rang $A \geq 2$,
bordăm $\Rightarrow$ obținem $\det S = 0 \Rightarrow$ rang $A = 2$, $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ și

$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $(C_1 = C_3) \Rightarrow$ compat nedeterminat

Sist nr. $\begin{cases} x - y = 1 + \alpha \\ x + y = 1 + \alpha \end{cases}$, $z = \alpha$ $\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$

„+": $2x = 2(1+\alpha) \Rightarrow x = 1 + \alpha$

„−": $-2y = 0 \Rightarrow y = 0$

Fie $\begin{cases} x - y - mz = 1 \\ mx + y + mz = 1 - m \\ mx + 3y + 3z = -1 \end{cases}$

Găsiți m dacă sist incompatibil

$E_1)$ S incompatibil $\Leftrightarrow \det S = 0$ și $\exists \Delta_c \neq 0$

$E_2)$ $\det S = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -m \\ m & 1 & m \\ m & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 - \cancel{m^2} - 3m^2 + \cancel{m^2} - \cancel{3m} + \cancel{3m} =$

$= -3m^2 + 3$

$E_3)$ $\det S = 0 \Rightarrow -3m^2 + 3 = 0 \Rightarrow 3m^2 = 3 \Rightarrow m^2 = 1$

$\Rightarrow m = \pm 1$

$E_4)$ Dacă $m = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x + 3y + 3z = -1 \end{cases}$

rang $A = ?$, $|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow$ rang $A \geq 1$, bordăm $\Rightarrow$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow$ rang $A \geq 2$, bordăm $\Rightarrow \det S = 0$

$\Rightarrow$ rang $A = 2$ $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$

$= -1 + 0 + 3 - 1 - 0 - 1 = 0 \Rightarrow$ compatibil

$E_5)$ Dacă $m = -1 \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ -x + y - z = 2 \\ -x + 3y + 3z = -1 \end{cases}$

Rang $A = ?$, $|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow$ rang $A \geq 1$, bordăm $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

căutăm altul, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$; $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0$,

$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\cancel{1} + 2 - 3 + \cancel{1} - 6 + 1 = -6 \neq 0 \Rightarrow$ incompat.

Deci, $\boxed{m = -1}$

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ și $\begin{cases} ax+by+cz=b \\ cx+ay+bz=a \\ bx+cy+az=c \end{cases}$

Rezolvați sist dacă este compatibil determinat

S compatibil determinat $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$E_1)$ S compatibil determinat

$$E_2)\ \det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \xlongequal{l_3+l_2+l_1} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \neq 0 \text{ (i)}$$

$$E_3)\ \Delta_x = \begin{vmatrix} b & b & c \\ a & a & b \\ c & c & a \end{vmatrix} = 0 \ (c_1 = c_2)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \det A$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & b \\ c & a & a \\ b & c & c \end{vmatrix} = 0 \ (c_2 = c_3)$$

$$E_4)\ x = \frac{\Delta_x}{\det A} = 0;\quad y = \frac{\Delta_y}{\det A} = 1,\quad z = \frac{\Delta_z}{\det A} = 0$$

$\Rightarrow (0; 1; 0)$ soluție

Fie $\begin{cases} mx+y-z=1 \\ x+y-z=2 \\ -x+y+z=0 \end{cases}$. Găsiți $m\in\mathbb{Z}$

a.î. sistemul are o soluție unică $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{Z}^3$

$E_1)$ S are sol unică $\Leftrightarrow \det S\neq 0$

$E_2)$ $\det S=\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=m+1-1-1+m-1=2m-2$

$E_3)$ $\det S\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 1$

$E_4)$ $\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1+0-2+0+1-2=-2$

$\Delta_y=\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2m\cancel{+1}+0-2-0\cancel{-1}=2m-2$

$\Delta_z=\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0\cancel{-2+1+1}-2m-0=-2m$

$E_5)$ $x=\dfrac{\Delta_x}{\det A}=\dfrac{-2}{2m-2}=\dfrac{-1}{m-1}$; $y=\dfrac{2m-2}{2m-2}=1$ și

$z=\dfrac{\Delta_z}{\det A}=\dfrac{-2m}{2(m-1)}=-\dfrac{m}{m-1}$

$E_6)$ Dar $x,y,z\in\mathbb{Z}\Rightarrow m-1\in D_1\Rightarrow m-1\in\{\pm 1\}\Rightarrow m\in\{2;0\}$

$1\in\mathbb{Z}$ adev.

$m-1\in D_m$

Pt $m=2\Rightarrow z=-\dfrac{2}{1}=-2\in\mathbb{Z}$ OK

Pt $m=0\Rightarrow z=0\in\mathbb{Z}$ OK.

Deci, $m\in\{0;2\}$