

SIRURI RECURRENTE DE ORD. I

Studiați monotonia, mărginirea, convergența și găsiți limita
sirului x_n în situațiile:

1) $x_1 = 2, x_{n+1} = \sqrt{4x_n - 3}$

2) $x_1 = 3, x_{n+1} = 2x_n + 3$

3) $x_1 = 5, x_{n+1} = -3x_n + 1$

4) $x_1 = 2, x_{n+1} = \sqrt{6x_n - 5}$

5) $x_1 = 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$

6) $x_1 = 5, x_{n+1} = \sqrt{7x_n - 12}$

7) $x_1 = 6, x_{n+1} = \sqrt{15x_n - 56}$

8) $x_1 = 5, x_{n+1} = \sqrt{4x_n - 4}$

9) $x_1 = -1, x_{n+1} = -2x_n + 1$

10) $x_1 = -2, x_{n+1} = 3x_n + 3$

Studiati monotonia, mărjirea, convergența și găsiți limita nrului x_n :

$$x_1 = 2, x_{n+1} = \sqrt{4x_n - 3}$$

E₁) monotonia: $x_2 = \sqrt{4x_1 - 3} = \sqrt{5} \Rightarrow x_2 > x_1$

arest inducție $x_{n+1} > x_n, \forall n \geq 1$

I P(1): $x_2 > x_1$ adev.

II Ip. P(k) adev. $\stackrel{(?)}{\Rightarrow}$ P(k+1) adev.

P(k): $x_{k+1} > x_k$ P(k+1): $x_{k+2} > x_{k+1}$

Știn că $x_{k+1} > x_k \mid \cdot 4 \Rightarrow 4x_{k+1} > 4x_k \mid -3 \Rightarrow 4x_{k+1} - 3 > 4x_k - 3$

$\Rightarrow \sqrt{4x_{k+1} - 3} > \sqrt{4x_k - 3} \Rightarrow x_{k+2} > x_{k+1} \Rightarrow P(k+1) \text{ adev.} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(n) \text{ adev.}, \forall n \geq 1 \Rightarrow x_{n+1} > x_n \Rightarrow \boxed{x_n \nearrow} \quad (1)$

E₂) mărjirea: din $x_n \nearrow \Rightarrow x_n \geq 2$

At a găsi cealaltă mărjire, posibilă limită finită și au este l și trec la limită în $x_{n+1} = \sqrt{4x_n - 3} \Rightarrow l = \sqrt{4l - 3} \stackrel{l \geq 0}{\Rightarrow} l^2 \geq \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow l^2 = 4l - 3 \Rightarrow l^2 - 4l + 3 = 0 \Rightarrow l_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} < 1$$

Știn, $x_1 = 2, x_n \nearrow \Rightarrow$ arstăm că $x_n \leq 3, \forall n \geq 1$

I P(1): $x_1 \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq 3$ adev.

II Ip. P(k) adev. $\stackrel{(?)}{\Rightarrow}$ P(k+1) adev. unde

P(k): $x_k \leq 3$ și P(k+1): $x_{k+1} \leq 3$

Din $x_k \leq 3 \mid \cdot 4 \Rightarrow 4x_k \leq 12 \mid -3 \Rightarrow 4x_k - 3 \leq 9 \mid \sqrt{\quad}$

$\Rightarrow \sqrt{4x_k - 3} \leq 3 \Rightarrow x_{k+1} \leq 3 \Rightarrow P(k+1) \text{ adev.} \Rightarrow P(n) \text{ adev.}, \forall n \geq 1$

$\Rightarrow x_n \in [2, 3] \Rightarrow \boxed{x_n \text{ mărjinit}} \quad (2)$

E₃) Din (1) + (2) $\Rightarrow \boxed{x_n \text{ convergent}}$

E₄) trecând la limită în relația de recurență $\Rightarrow l = \sqrt{4l - 3}$

E₄) trecând la limită în relația de recurență $\Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3}$