Studiați continuitatea în punctele unde f își schimbă forma pentru (și precizați tipul de discontinuitate)

a) $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<2 \\ x^2-3, & x\geq 2 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x\leq 1 \\ \frac{x+1}{2}, & x>1 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x<1 \\ \frac{2}{x}, & x\geq 1 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x-2}, & x\leq 1 \\ \frac{1}{x-1}, & x>1 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x<0 \\ x^2, & x\geq 0 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, & x<0 \\ x+1, & x\geq 0 \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ \frac{2+x}{x}, & x>0 \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x<0 \\ \frac{2+x}{1+x}, & x\geq 0 \end{cases}$

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, studiați continuitatea lui

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

E1) f cont pe $(-\infty; 0)$ și pe $(0; \infty)$ ca și fct elementară (1)

E2) studiem cont. lui f în $x = 0$

$$l_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{e^x - 1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=\!=} 1$$ (limită remarcabilă)

$$l_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x+1) = 1$$

$$f(0) = 1$$

$l_s(0) = l_d(0) = f(0) \Rightarrow$ x cont în $x = 0$ (2)

E3) din (1) + (2) $\Rightarrow$ f cont pe $\mathbb{R}$

Fie $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\in[0;1] \\ \dfrac{a\sin(x-1)}{x^2-3x+2}, & x\in(1;\pi] \end{cases}$

$a=?$ dacă f cont. pe $[0;\pi]$

$E_1)$ f cont pe $[0;1)$ și pe $(1;\pi]$ ca și fct. elementară

$E_2)$ ar trebui ca f cont în $x=1$

$\Leftrightarrow l_s(1)=l_d(1)=f(1)$

$E_3)$ $l_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} e^x=e$

$$l_d(1)=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{a\sin(x-1)}{x^2-3x+2}\overset{\frac{a\cdot 0}{0}}{=\!=\!=}\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{a\cdot\sin(x-1)}{1(x-1)(x-2)}$$

pt că $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

dar, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}=1$ (pt că $\lim\limits_{x_n\to0}\dfrac{\sin x_n}{x_n}=1$ și în cazul nostru $x_n=x-1\to0$)

$$\Rightarrow l_d(1)=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{a}{x-2}\cdot\underbrace{\frac{\sin(x-1)}{x-1}}_{\to1}=\frac{a}{-1}$$

$f(1)=e^1=e$

$E_4)$ f cont în $x=1\Leftrightarrow e=\dfrac{a}{-1}=e\Leftrightarrow\boxed{a=-e}$

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2|x-1|}{x^2-x+1}$

Studiați continuitatea lui f

E_1) de fiecare dată când o funcție depinde de modul, explicităm cu tabel modulul

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

x		1	
$x-1$	$- - - -$	0	$+ + +$

E_2) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-2(x-1)}{x^2-x+1}, & x\le 1\\[2mm] \dfrac{2(x-1)}{x^2-x+1}, & x>1\end{cases}$$

E_3) f continuă pe $(-\infty,1)$ și pe $(1,\infty)$ ca și funcție elementară (1)

E_4) studiem dacă f continuă în $x=1$

$$\left.\begin{aligned} l_s(1)&=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{-2(x-1)}{x^2-x+1}=0\\ l_d(1)&=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{2(x-1)}{x^2-x+1}=0\\ f(1)&=\frac{-2\cdot 0}{1-1+1}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ cont. în $x=1$ (2)

E_5) Din (1) și (2) $\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}$

5/90 Fie $f:[0;3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}(1-\{x\})$.

Se cere $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$

E1) de fiecare dată când apare $\{x\}$, folosim

$\{x\}=x-[x]$

E2) $f(x)=(x-[x])(1-x+[x])$

Dar, $x\in[0;3]\Rightarrow$

$$f(x)=\begin{cases}(x-0)(1-x+0), & x\in[0;1)\\(x-1)(1-x+1), & x\in[1;2)\\(x-2)(1-x+2), & x\in[2;3)\\(x-3)(1-x+3), & x=3\end{cases}$$

$$E3)\ f(x)=\begin{cases}x(1-x), & x\in[0;1)\\(x-1)(2-x), & x\in[1;2)\\(x-2)(3-x), & x\in[2;3)\\(x-3)(4-x), & x=3\end{cases}$$

$$E4)\ \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x(1-x)=0$$

Fie $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2-8}-1}{x^2-5x+6}, & x\in\mathbb{R},\ x\neq 3,\ x\neq 2 \\ a, & x\in\{2;3\} \end{cases}$

Se cere $a=?$ dacă $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$

$$E_1)\ \lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-8}-1}{x^2-5x+6}\ \frac{0}{0}$$

$$E_2)\ l=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-8-1}{\sqrt{x^2-8}+1}\cdot\frac{1}{x^2-5x+6}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{(\sqrt{x^2-8}+1)(x^2-5x+6)}\ \frac{0}{2\cdot 0}$$

$E_3)$ Folosim $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

$$x^2-5x+6=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2\cdot 1} \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^2-5x+6=1(x-3)(x-2)$$

$$E_4)\ l=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{(\sqrt{x^2-8}+1)\cancel{(x-3)}(x-2)}=\frac{6}{2}=3$$

$E_5)$ $f(3)=a$, și $l=a \Rightarrow a=3$