PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR CONTINUE. SOLUȚII ALE ECUAȚIILOR

Arătați că următoarele ec au cel puțin o soluție pe intervalele indicate. Este soluția unică?

1) $x^3-2x=2$, $I=(1;2)$

2) $x^5+x^2+x=1$, $I=[0;1]$

3) $x+\ln x=0$, $I=(0;1)$

4) $x^5+x=1$, $I=[0;1]$

5) $\operatorname{arctg} x+x=1$, $I=(0;1)$

6) $e^x-x-2=0$, $I=(1;2)$

7) $\arcsin x+x=1$, $I=(0;1)$

8) $2^x=4-x$, $I=\mathbb{R}$

9) $x+\cos x=2$, $I=(\frac{\pi}{2};\pi)$

10) $x^3-2x=1$, $I=\mathbb{R}$

11) $\frac{1}{1-x}+\ln x^2=0$, $I=(-1;e)$

12) Fie $f:[0;2\pi]\to\mathbb{R}$, f cont și $f(0)=f(2\pi)$, arătați că $\exists c\in[0;\pi]$ cu $f(c)=f(c+\pi)$

13) Fie $f:[-a,a]\to[-a,a]$, $a>0$, f cont $\Rightarrow \exists u,v\in[-a,a]$ cu $f(u)=u$, $f(v)=-v$

14) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f cont cu $f(0)<0$, $f(1)>1$, se cere $\exists c\in(0;1)$ cu $f(c)=\frac{1}{2-c}$

15) $f:\mathbb{R}\to(0;\infty)$ cont, arăt. că $\exists c\in(0;\infty)$ cu $f(c)=\frac{c}{1-c}$

16) Fie $f,g:[a,b]\to[a,b]$ continue cu $g(a)=b$, $g(b)=a$, se cere ca ec. $f(a+b-x)=g(x)$ are cel puțin o sol reală

17) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f cont, arăt. că $\exists c\in(a,b)$ cu $f(c)=\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}$

18) $f,g:[a,b]\to[a,b]$ cont. cu $g(a)=a$, $g(b)=b$, se cere ec. $f(x)=g(x)$ are cel puțin o sol. reală

Arătați că ecuația $x^5+x^2+x=1$ are cel puțin o soluție în $[0;1]$, este soluția unică?

$E_1)$ $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ $f(x)=x^5+x^2+x-1$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)\cdot f(1)=-1\cdot 2<0 \\ f \text{ continuă} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ec. } f(x)=0 \text{ are cel puțin o rad} \in (0;1)$$

$\Rightarrow$ ec $f(x)=0$ are cel puțin o soluție $\in[0;1]$

$E_2)$ dacă f s monot $\Rightarrow$ soluția unică

$f_s \nearrow$ pt că e sumă de fd s $\nearrow$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ soluția unică

Fie $f:[0;2\pi]\to\mathbb{R}$, f cont pe $[0;\pi]$ și $f(0)=f(2\pi)$, arătați că $\exists\, c\in[0;\pi]$ cu $f(c)=f(c+\pi)$

$E_1)$ $f(c)=f(c+\pi)\Leftrightarrow f(c)-f(c+\pi)=0$

$E_2)$ Fie $g:[0;\pi]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-f(x+\pi)$

$E_3)$ f cont pe $[0;\pi]\Rightarrow g$ cont pe $[0;\pi]$

$E_4)$ $g(0)\cdot g(\pi)=\big(f(0)-f(\pi)\big)\big(f(\pi)-f(2\pi)\big)$

Dar, $f(0)=f(2\pi)\Rightarrow$

$$g(0)\cdot g(\pi)=\big(f(2\pi)-f(\pi)\big)\big(f(\pi)-f(2\pi)\big)$$

$$=-\big(f(\pi)-f(2\pi)\big)\big(f(\pi)-f(2\pi)\big)$$

$$=-\big(f(\pi)-f(2\pi)\big)^2\le 0$$

$E_5)$ $\left.\begin{array}{l} g \text{ cont pe } [0;\pi] \\ g(0)\cdot g(\pi)\le 0 \end{array}\right\}\Rightarrow \exists\, c\in[0;\pi]$ a.î. $g(c)=0$

$E_6)$ $g(c)=0\Rightarrow f(c)-f(c+\pi)=0\Rightarrow f(c)=f(c+\pi)$

Fie $f:[-a,a]\to[-a,a]$, $a>0$, f cont pe $[-a,a] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, u, v \in [-a,a]$ cu $f(u)=u$, $f(v)=-v$

E1) $f(u)=u \Leftrightarrow f(u)-u=0$

E2) Fie $g(x)=f(u)-u$, $g:[-a,a]\to\mathbb{R}$

Cum f cont pe $[-a,a] \Rightarrow g$ cont pe $[-a,a]$

E3) $g(-a)g(a)=(f(-a)+a)(f(a)-a)$

Dar, $Cd_f=[-a,a] \Rightarrow f(x)\in[-a,a],\ \forall x\in[-a,a]$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a \le f(-a) \le a \ \big|+a \Rightarrow 0 \le f(-a)+a \\ -a \le f(a) \le a \ \big|-a \Rightarrow f(a)-a \le 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (f(-a)+a)(f(a)-a) \le 0 \Rightarrow g(-a)g(a) \le 0$

E4) g cont şi $g(-a)g(a)\le 0 \Rightarrow \exists\, u\in[-a,a]$ cu $g(u)=0$

$\Rightarrow f(u)-u=0 \Rightarrow f(u)=u$

E5) $f(v)=-v \Leftrightarrow f(v)+v=0$, fie $h(x)=f(x)+x$,

$h:[-a,a]\to\mathbb{R}$ şi f cont pe $[-a,a] \Rightarrow h$ cont pe $[-a,a]$

E6) $h(-a)h(a)=(f(-a)-a)(f(a)+a)$ şi cum $Cd_f=[-a,a]$

$\Rightarrow f(-a)\le a$, $f(a)\ge -a \Rightarrow h(-a)h(a)\le 0$ şi h cont

$\Rightarrow \exists\, v\in[-a,a]$ cu $h(v)=0 \Leftrightarrow f(v)+v=0$

$\Rightarrow f(v)=-v$

Fie $f, g : [a,b] \to [a,b]$ cont pe $[a,b]$ cu $g(a) = b$, $g(b) = a$, se cere ca ec. $f(a+b-x) = g(x)$ are cel puțin o soluție reală

E1) $f(a+b-x) = g(x) \Leftrightarrow f(a+b-x) - g(x) = 0$

E2) fie $h(x) = f(a+b-x) - g(x)$, $h : [a,b] \to \mathbb{R}$

E3) f, g cont pe $[a,b] \Rightarrow h$ cont pe $[a,b]$

E4) $h(a) \cdot h(b) = \big(f(a+b-a) - g(a)\big)\big(f(a+b-b) - g(b)\big) =$

$= \big(f(b) - b\big)\big(f(a) - a\big)$

E5) $Cd_f = [a,b] \Rightarrow f(b) \le b$ și $f(a) \ge a$

$\Rightarrow \big(f(b) - b\big)\big(f(a) - a\big) \le 0$

E6) $\left.\begin{array}{l} h \text{ cont pe } [a,b] \\ h(a) \cdot h(b) \le 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ ec. $h(x) = 0$ are cel puțin o soluție $x \in [a,b]$

$\Rightarrow$ ec. $f(a+b-x) = g(x)$ are cel puțin o soluție reală

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f cont, arătați că $\exists\, c\in(a,b)$ cu $f(c)=\dfrac{1}{a-c}+\dfrac{1}{b-c}$

$E_1)$ $f(c)=\dfrac{1}{a-c}+\dfrac{1}{b-c} \Leftrightarrow f(c)-\dfrac{1}{a-c}-\dfrac{1}{b-c}=0$

$E_2)$ $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{a-x}-\dfrac{1}{b-x}$

f cont pe $[a,b] \Rightarrow g$ cont pe $[a,b]$

$E_3)$ $g(a)\,g(b)=f(a)-\dfrac{1}{0}-\dfrac{1}{b-a}$ dar $\nexists\ \dfrac{1}{0}$,

deci folosim proprietatea sub formă de limite

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} g(x)\cdot\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} g(x)=\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}\left(f(x)-\frac{1}{a-x}-\frac{1}{b-x}\right)\cdot\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}}\left(f(x)-\frac{1}{a-x}-\frac{1}{b-x}\right)$$

$$\underbrace{\left(f(a)-\frac{1}{0_-}-\frac{1}{b-a}\right)\left(f(b)-\frac{1}{a-b}-\frac{1}{0_+}\right)}_{\infty\cdot(-\infty)}=-\infty<0$$

$$\left.\begin{array}{l} E_4)\ g \text{ cont pe } [a,b] \\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} g(x)\cdot\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} g(x)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ec } g(x)=0 \text{ are cel puțin o răd reală } c\in(a,b)$$

$\Leftrightarrow \exists\, c\in(a,b)$ cu $f(c)=\dfrac{1}{a-c}+\dfrac{1}{b-c}$

Fie $f, g : [a,b] \to [a,b]$ cont cu $g(a)=a$, $g(b)=b$

Arătați că ec. $f(x)=g(x)$ are cel puțin o răd reală

$E_1)$ $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$ are cel puțin o răd reală

$E_2)$ Fie $h(x)=f(x)-g(x)$, $h:[a,b]\to\mathbb{R}$

f, g cont pe $[a,b] \Rightarrow h$ cont pe $[a,b]$

$E_3)$ $h(a)h(b)=(f(a)-g(a))(f(b)-g(b)) \overset{ip}{=}$

$=(f(a)-a)(f(b)-b)$

$E_4)$ dar, $Cd_f=[a,b] \Rightarrow f(x)\in[a,b]$, $\forall x \in D_f$

$\Rightarrow f(a)\in[a,b]$ și $f(b)\in[a,b]$

$\Rightarrow f(a)-a \geq 0$ și $f(b)-b\leq 0$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow h(a)h(b)\leq 0 \\ \text{Dar, } h \text{ cont pe } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ec } h(x)=0 \text{ are}$$

cel puțin o răd $\in[a,b]$

$\Leftrightarrow$ ec. $f(x)=g(x)$ are cel puțin o răd $\in[a,b]$