FUNCȚII CONTINUE BIJECTIVE

Studiați dacă următoarele funcții sunt bijective:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2^x$

$g:(-\infty;1)\to\mathbb{R}_+$, $g(x)=x^2-2x+7$

$h:\mathbb{R}\to(4;\infty)$, $h(x)=x^2-2x+5$

2) $f:(-\infty;2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$

$g:(-\infty;3]\to[1;\infty)$, $h(x)=x^2-6x+10$

$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=x+1+5^x$

3) $f:\mathbb{R}\to(0;\infty)$, $f(x)=2^x+3^x$

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^3-x+1$

$h:(1;\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=\log_3 x+\frac{1}{1-x}$

4) $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x-x$

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x^4+x^3+1$

$h:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=\sqrt[3]{x}+x$

Stabiliți dacă următoarele funcții sunt bijective:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+2^x$ b) $g:(-\infty;1)\to\mathbb{R},\ g(x)=x^2-2x+7$

c) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=x^2-2x+5$

---

a) E_1) f continuă ca sumă de funcții continue

E_2) $f_1(x)=x$, $f_2(x)=2^x$, f_1 și f_2 sunt $s\nearrow \Rightarrow f\ s\nearrow$ unde

$f(x)=x+2^x \Rightarrow f$ injectivă (1)

E_3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+2^x\right)\underset{-\infty+0}{\overset{-\infty+2^{-\infty}}{=\!=}}-\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+2^x\right)\overset{\infty+\infty}{=\!=}\infty$

x	$-\infty$		∞
f	$-\infty$	$\nearrow$	∞

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = Cd_f$

$\Rightarrow f$ surjectivă (2)

Din (1) + (2) $\Rightarrow f$ bijectivă

---

b) E_1) g cont. ca operații cu funcții continue

E_2) $g(x)=x^2-2x+7 \Rightarrow a=1>0 \Rightarrow g\ s\searrow$ pe $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right]$,

$g\ s\nearrow$ pe $\left[-\frac{b}{2a};\infty\right)$

$x_V=-\frac{b}{2a}=1$

x	$-\infty$		1
g	∞	$\searrow$	6

$\Rightarrow$ pt $x\in(-\infty;1)$, $g\ s\searrow \Rightarrow g$ injectivă (1)

E_3) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-2x+7\right)=\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} g(x)=6$ și $g\ s\searrow$

$\Rightarrow \operatorname{Im} g=(6,\infty)\neq Cd_f$ (pt că $Cd_f=\mathbb{R}$) $\Rightarrow g$ nu e surj $\Rightarrow$

$\Rightarrow g$ nu e bijectivă

---

c) E_1) h continuă ca op. cu fct continue

E_2) $h(x)=x^2-2x+5 \Rightarrow h\ s\searrow$ pe $(-\infty;1]$ și $h\ s\nearrow$ pe $[1;\infty)$

$\Rightarrow h$ continuă și nu e strict monotonă $\Rightarrow h$ nu e injectivă

$\Rightarrow h$ nu e bijectivă

(am fi putut $h(x)=x(x-2)+5 \Rightarrow h(0)=h(2)=5$ și $0\neq2 \Rightarrow h$ nu e inj)

$\operatorname{Im} f=[4;\infty)\neq\mathbb{R} \Rightarrow h$ nu e surj

x	$-\infty$	1	∞