PROBLEME NONSTANDARD CU LIMITE DE FUNCȚII

1) Găsiți $f(x)$ dacă

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+xe^{nx}}{1+e^{nx}}$$

2) Găsiți $f(x)$ dacă

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|e^{nx}+(x+1)^2e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}$$

3) Arătați că f este mărginită

dacă $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 0, & x=0\end{cases}$

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + x e^{nx}}{1 + e^{nx}} \text{ se cere } f(x)$$

E_1) apare ca putere a lui e expresia nx

și $n \to \infty$ ne interesează semnul lui x

E_2) __Cazul I__: $x < 0 \Rightarrow f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + x e^{nx}}{1 + e^{nx}} \overset{\frac{1 + x \cdot 0}{1 + 0}}{=\!=}$

$\Rightarrow f(x) = 1$

__Cazul II__: $x = 0 \Rightarrow f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + 0 \cdot e^{n \cdot 0}}{1 + e^{n \cdot 0}} = \frac{1}{2}$

__Cazul III__: $x > 0 \Rightarrow f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + x e^{nx}}{1 + e^{nx}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}$

$\Rightarrow f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{e^{nx}}\left(\frac{1}{e^{nx}} + x\right)}{\cancel{e^{nx}}\left(\frac{1}{e^{nx}} + 1\right)} \overset{\frac{\frac{1}{\infty} + x}{\frac{1}{\infty} + 1}}{=\!=} x$

E_3) $f(x) = \begin{cases} 1 & , x < 0 \\ \frac{1}{2} & , x = 0 \\ x & , x > 0 \end{cases}$

Fie $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x-1|e^{nx} + (x+1)^2 e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}}$

E1) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{{}^{e^{nx})}|x-1|e^{nx} + \dfrac{(x+1)^2}{e^{nx}}}{{}^{e^{nx})}e^{nx} + \dfrac{1}{e^{nx}}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x-1|e^{2nx} + (x+1)^2}{e^{2nx} + 1}$ (numitorii s-au simplificat)

E2) Folosim $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \nexists, & q \le -1 \\ 0, & q \in (-1,1) \\ 1, & q = 1 \\ \infty, & q > 1 \end{cases}$

E3) apare în limită e^{2nx}

Caz I: $x < 0 \Rightarrow 2nx \to -\infty$ și $e^{2nx} \to e^{-\infty} = 0 \Big\} \Rightarrow f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{1}$

Caz II: $x = 0 \Rightarrow f(0) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 \cdot e^0 + 1^2}{e^0 + 1} = 1$

Caz III: $x > 0 \Rightarrow 2nx \to \infty \Rightarrow$

$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{e^{2nx}}\left(|x-1| + \overbrace{\dfrac{(x+1)^2}{e^{2nx}}}^{\to 0}\right)}{\cancel{e^{2nx}}\left(1 + \underbrace{\dfrac{1}{e^{2nx}}}_{\to 0}\right)} = |x-1|$

E4) $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \ldots, & x > 0 \end{cases}$

130/96 Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 0, & x=0 \end{cases}$

Arătați că f mărginită pe $\mathbb{R}$

E_1) Dacă $\operatorname{Im} f$ mărginită $\Leftrightarrow$ f mărginită pe $\mathbb{R}$

E_2) nu e necesar să calculăm $\operatorname{Im} f$, e suficient să calculăm limitele la toate capetele unde f schimbă forma

E_3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\sin\frac{1}{x^2} \overset{\infty\cdot 0}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=1$

$$\text{ș.a. că } \lim_{x_n\to 0}\frac{\sin x_n}{x_n}=1$$

Analog, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=1$

E_4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^2\sin\frac{1}{x^2} \overset{0\cdot[-1,1]}{=} 0$

Analog, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=0$

E_5) $f(0)=0$ (din definiție)

E_6)

x	$-\infty$	0	∞
$f(x)$	1	$0)0(0$	1

Deoarece în toate capetele $D_f \Rightarrow f$ ~~margi~~ finită

f mărginită