DERIVABILITATEA FUNCȚIILOR CU (SAU FĂRĂ) ACOLADĂ

Studiați derivabilitatea următoarelor funcții (sau determinați constantele a, b, c pentru care funcțiile sunt derivabile):

1) $f(x)=\begin{cases} x+3, & x<2 \\ x^2+1, & x\geq 2 \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} 1+\sqrt{x}, & x\geq 1 \\ \sqrt{x+3}, & x<1 \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} \frac{e^x+1}{x}, & x<0 \\ 3x+1, & x\geq 0 \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} \frac{x-1}{x^2+3}, & x>0 \\ 2ax+b, & x\leq 0 \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b, & x\leq 1 \\ x^3-ax-b, & x>1 \end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases} x^2-x+1, & x\geq 0 \\ a\sin x+b\cos x, & x<0 \end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases} a\cdot \operatorname{arctg} x+b, & x\leq 0 \\ 2ax+1, & x>0 \end{cases}$

8) $f(x)=\begin{cases} x^2+ax-2, & x\in[1;2) \\ 4, & x=2 \\ bx^2-2x+c, & x\in(2;\infty) \end{cases}$

9) $f(x)=\begin{cases} \sin ax+b\cos x, & x\leq 0 \\ \cos ax+b\sin x, & x>0 \end{cases}$

10) $f(x)=\begin{cases} \cos x+\sin x, & x\geq \pi \\ x^2+ax+b, & x<\pi \end{cases}$

11) $f(x)=\begin{cases} \frac{-2(x-1)}{x^2-x+1}, & x\leq 1 \\ \frac{2(x-1)}{x^2-x+1}, & x>1 \end{cases}$

12) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 0, & x=0 \end{cases}$

13) $g(x)=\sqrt[3]{x-\sin x}$

14) $f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$

Găsiți $a, b \in \mathbb{R}$ dacă f deriv pe $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2+3}, & x > 0 \\ 2ax+b, & x \le 0 \end{cases}$$

E1) f derivabilă pe $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$

E2) f trebuie să fie cont în $x=0 \Leftrightarrow l_s(0) = l_d(0) = f(0)$

$$\left.\begin{array}{l} l_s(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} (2ax+b) = b \\ l_d(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{x-1}{x^2+3} = -\dfrac{1}{3} \\ f(0) = b \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{b = -\frac{1}{3}}$$

E3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2+3}, & x > 0 \\ 2ax - \dfrac{1}{3}, & x \le 0 \end{cases}$

E4) f trebuie să fie derivabilă în $x=0$

$\Leftrightarrow f'_s(0) = f'_d(0)$

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{2ax \cancel{-\frac{1}{3}} \cancel{+\frac{1}{3}}}{x-0} = 2a$$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\frac{x-1}{x^2+3}^{(3} + \frac{1}{3}^{(x^2+3}}{x-0} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\frac{3x \cancel{-3} + x^2 \cancel{+3}}{3(x^2+3)}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x^2+3x}{3(x^2+3)x} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\cancel{x}(x+3)}{3(x^2+3)\cancel{x}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

E5) $f'_s(0) = f'_d(0) \Rightarrow 2a = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{6}}$

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{2(x-1)}{x^2-x+1}, & x\le 1 \\ \dfrac{2(x-1)}{x^2-x+1}, & x>1 \end{cases}$

Studiați derivabilitatea funcției

E_1) f continuă

f cont. pe $(-\infty;1)$ și pe $(1;\infty)$ ca și fct elementară;

f cont în $x=1$

$l_s(1)=0$; $l_d(1)=0$; $f(1)=0 \Rightarrow f$ cont în $x=1$

$\Rightarrow f$ cont pe $\mathbb{R}$

E_2) f derivabilă

f derivabilă pe $(-\infty;1)$ și pe $(1;\infty)$

studiem derivabilitatea în $x=1$

$$f'_s(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{-\frac{2(x-1)}{x^2-x+1}-0}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}-\frac{2\cancel{(x-1)}}{x^2-x+1}\cdot\frac{1}{\cancel{x-1}}=\frac{-2}{1}=-2$$

$$f'_d(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\frac{2(x-1)}{x^2-x+1}-0}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{2\cancel{(x-1)}}{x^2-x+1}\cdot\frac{1}{\cancel{x-1}}=2$$

E_3) $f'_s(1)=-2$; $f'_d(1)=2 \Rightarrow f$ nu e derivabilă

f derivabilă pe $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Arătați că f derivabilă pe $\mathbb{R}$

$E_1)$ f derivabilă pe $(-\infty; 0)$ și pe $(0; \infty)$

$E_2)$ studiem dacă f cont. în $x = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} x^2 \sin \frac{1}{x^2} \xrightarrow{0 \cdot [-1;1]} 0 \\ &\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^2 \sin \frac{1}{x^2} \xrightarrow{0 \cdot [-1;1]} 0 \\ &f(0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \text{ cont. în } x = 0 \quad (1)$$

$E_3)$ studiem dacă f derivabilă în $x = 0$

$$\left.\begin{aligned} &f'_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{x^{\cancel{2}} \sin \frac{1}{x^2}}{\cancel{x}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} x \sin \frac{1}{x^2} \xrightarrow{0 \cdot [-1;1]} 0 \\ &f'_d(0) = \text{- - - - - -} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \text{ derivabilă în } x = 0 \quad (2)$$

$E_4)$ f derivabilă pe $\mathbb{R}$

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sin x$

Arătați că $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{f(x)}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

E1) $g(x) = \sqrt[3]{x - \sin x}$,

$$g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-\sin x)^2}} \cdot (x - \sin x)' = \frac{1-\cos x}{3\sqrt[3]{(x-\sin x)^2}}$$

E2) g este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$ unde α e rădăcină pentru numitorul lui $g'(x)$. În punctele unde numitorul lui $g'(x)$ este zero, g poate fi sau poate să nu fie derivabilă, studiem cu definiția acest lucru.

E3) Găsim rădăcinile lui $x - \sin x = 0$, adică rădăc lui $f(x) = 0$

$f'(x) = 1 - \cos x$, $f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}$

x	-2π		0		2π		4π	
f'	0	$++$	0	$++$	0	$+$	0	$+$
f	-2π	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2π	$\nearrow$	4π	$\nearrow$

și $f'(x) \geq 0$ pt că $\cos x \leq 1$

$f(0) = 0 - \sin 0 = 0$, $f(2\pi) = 2\pi - \sin 2\pi = 2\pi - 0 = 2\pi$

$\Rightarrow$ singura răd este $x = 0$

E4) Așadar, g derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, studiem cu definiția dacă g derivabilă în $x = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x - \sin x}}{x} = \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{\frac{x - \sin x}{x^3}}$$

I: $l_1 = \lim \frac{x - \sin x}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{l'H}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} \Rightarrow$ $g'(0) = \frac{1}{6} \in \mathbb{R}$

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$, determinați domeniul de derivabilitate al lui f

---

E_1) Calculăm $f'(x)$ și în condițiile noi care apar studiem cu definiția dacă f e sau nu e derivabilă

E_2)
$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{1+2x^2+x^4}}}\cdot\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{1-2x^2+x^4}{(1+x^2)^2}}}\cdot\frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2}=\sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}}\cdot\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=$$
$$=\frac{|1+x^2|}{|1-x^2|}\cdot\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{\cancel{1+x^2}}{|1-x^2|}\cdot\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^{\cancel{2}}}=\frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)}$$

E_3) Cond.: $1-x^2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pm 1 \Rightarrow f$ deriv pe $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$

E_4) găsim semnul lui $1-x^2$,

x		-1		1	
$1-x^2$	$- - -$	0	$+ + +$	0	$- - -$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2\cancel{(1-x^2)}}{-\cancel{(1-x^2)}(1+x^2)}, & x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)\\[2ex] \dfrac{2\cancel{(1-x^2)}}{\cancel{(1-x^2)}(1+x^2)}, & x\in(-1;1)\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{-2}{1+x^2}, & x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)\\[2ex] \dfrac{2}{1+x^2}, & x\in(-1;1)\end{cases}$$

E_5) studiem dacă f deriv în $x=-1$

$$f'_s(-1)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-\arcsin(-1)}{x+1}\underset{l'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{\frac{-2}{1+x^2}-0}{1}=-1$$

$$f'_d(-1)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\frac{\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-\arcsin(-1)}{x+1}\underset{l'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\frac{\frac{2}{1+x^2}-0}{1}=1$$

$f'_s(-1)\neq f'_d(-1)\Rightarrow f$ nu e deriv în $x=-1$

E_6) Analog, $f'_s(1)=1$, $f'_d(1)=-1\Rightarrow f$ nu e deriv în $x=1$

$\Rightarrow f$ deriv pe $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}\Rightarrow$ domeniul de derivabilitate este $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$