TEOREMA LUI ROLLE

1) $m, n, p = ?$ dacă $f : [-1;1] \to \mathbb{R}$ verifică ip. T. Rolle și găsiți punctul c corespunzător, $f(x) = \begin{cases} mx^2 + nx + p, & x \in [-1;0] \\ e^x, & x \in (0;1] \end{cases}$

2) $f(x) = (x-3)(x-2)(x-1)(x+1)$, arătați că ec. $f'(x) = 0$ are cel puțin 3 rădăc. reale

3) Fie $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ derivabilă, $f(0) = 0$, arătați că $\exists u \in (0;1)$ cu $f'(u) = \frac{f(u)}{1-u}$

4) Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g cont pe $[a, b]$, deriv. pe (a, b) și $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)} \Rightarrow \exists c \in (a, b)$ cu $\frac{f(c)}{g(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

5) Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ cont pe $[a, b]$, deriv pe (a, b) $\Rightarrow \exists v \in (a, b)$ a. î. $f'(v) = \frac{f(a) - f(v)}{v - b}$

6) Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g cont $[a, b]$, deriv (a, b) cu $f(a) = f(b)$ și $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$

Se cere $\exists c \in (a, b)$ cu $g(c) = 0$

Fie $f(x)=(x-3)(x-2)(x-1)(x+1)$, arătați că 2

ec. $f'(x)=0$ are cel puțin 3 răd. reale

E_1) aplic T. Rolle pe $[-1;1] \Rightarrow f$ cont pe $[-1;1]$, f deriv pe $(-1;1)$ și $f(-1)=f(1)$ (pt că în acest caz sunt zero) $\xrightarrow{T. Rolle} \exists\, c_1 \in (-1;1)$ cu $f'(c_1)=0$

E_2) aplic T. Rolle pe $[1;2] \Rightarrow f$ cont pe $[1;2]$, f deriv pe $(1;2)$ și $f(1)=f(2) \xrightarrow{T. Rolle} \exists\, c_2 \in (1;2)$ cu $f'(c_2)=0$

E_3) aplic T. Rolle pe $[2;3]$, f cont pe $[2;3]$, f deriv pe $(2;3)$ și $f(2)=f(3) \xrightarrow{T. Rolle} \exists\, c_3 \in (2;3)$ cu $f'(c_3)=0$

E_4) $c_1 \in (-1;1)$, $c_2 \in (1;2)$, $c_3 \in (2;3) \Rightarrow c_1, c_2, c_3$ distincte $\Rightarrow f'(x)=0$ are cel puțin 3 răd reale

Fie $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ derivabilă, $f(0)=0$, arătați că $\exists\, u\in(0;1)$ cu $f'(u)=\dfrac{f(u)}{1-u}$

E1) $f'(u)=\dfrac{f(u)}{1-u} \Rightarrow f'(u)(1-u)-f(u)=0$

$\Rightarrow \left(f(u)\cdot(1-u)\right)'=0$

E2) Fie $g:[0;1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)(1-x)$

g cont pe $[0;1]$, g deriv pe $(0;1)$

$$\left.\begin{array}{l} g(0)=f(0)\cdot 1 \overset{ip}{=\!=} 0 \\ g(1)=f(1)\cdot 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(0)=g(1)$$

$\Rightarrow \exists\, u\in(0;1)$ a.î. $g'(u)=0$

E3) $g'(x)=f'(x)(1-x)+f(x)\cdot(-1)$

$g'(u)=0 \Rightarrow f'(u)(1-u)+f(u)\cdot(-1)=0$

$\Rightarrow f'(u)(1-u)=f(u)$

$\Rightarrow f'(u)=\dfrac{f(u)}{1-u}$

Dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f, g cont pe $[a,b]$, f, g deriv pe (a,b) atunci dacă

$$\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)}$$ există $c \in (a,b)$ a.î.

$$\frac{f(c)}{g(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

E1) $\dfrac{f(c)}{g(c)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow f(c)g'(c) - f'(c)g(c) = 0$

$$\Rightarrow \frac{f(c)g'(c) - f'(c)g(c)}{g^2(c)} = 0 \Rightarrow \left(\frac{f(c)}{g(c)}\right)' = 0$$

E2) Fie $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ cont pe $[a,b]$

și deriv pe (a,b) și $h(a) = h(b)$ (din ip.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ a.î. $h'(c) = 0$

E3) $h'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

$$h'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g^2(c)} = 0$$

$$\Rightarrow f'(c)g(c) - f(c)g'(c) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(c)}{g(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f cont pe $[a,b]$, f deriv pe (a,b) 5

arăt. că $\exists\, v\in(a,b)$ a.î. $f'(v)=\dfrac{f(a)-f(v)}{v-b}$

$E_1)$ $f'(v)\underbrace{(v-b)-f(a)+f(v)}=0$

$E_2)$ $\Big(f(v)(v-b)-f(a)\cdot v\Big)'=0 \Rightarrow g(x)=f(x)(x-b)-xf($

$E_3)$ Fie $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, g cont pe $[a,b]$, g deriv.

pe (a,b), $g(a)=f(a)(a-b)-f(a)\cdot a=-bf(a)$

$g(b)=f(b)(b-b)-f(a)\cdot b=0-bf(a)$

$E_4) \Rightarrow \exists\, c\in(a,b)$ a.î. $g'(c)=0$

$E_5)$ $g'(x)=f'(x)(x-b)+f(x)\cdot 1-f(a)$

$g'(c)=0 \Rightarrow f'(c)(c-b)+f(c)-f(a)=0$

$f'(c)(c-b)=f(a)-f(c)$

$f'(c)=\dfrac{f(a)-f(c)}{c-b}$

Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f, g cont pe $[a,b]$,
f, g deriv pe (a,b) cu $f(a) = f(b) = 0$ și
$f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$

Arătați că $\exists c \in (a,b)$ cu $g(c) = 0$

$E_1)$ (R.A.) Pp. $\nexists c \in (a,b)$ cu $g(c) = 0 \Rightarrow g(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$

$E_2)$ $f'(x) g(x) - f(x) g'(x) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)} \neq 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' \neq 0, \forall x \in (a,b) \quad (1)$$

$E_3)$ Fie $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ cont pe $[a,b]$,
h deriv pe (a,b), $h(a) = \dfrac{0}{g(a)} = 0$; $h(b) = 0$
$\Rightarrow h(a) = h(b) \Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ a. î. $h'(c) = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(c)}{g(c)}\right)' = 0 \text{ contradicție cu } (1)$$