TEOREMA LUI FERMAT

1) dacă $a>0, b>0$ și $a^x+b^x \geq a+b$, $\forall x\in\mathbb{R}$, se cere $a^a \cdot b^b$

2) $a=?$, $a>0$ dacă $e^x - ax \geq 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$

3) $a=?$ dacă $f(x)=2x^3-ax^2+1$ are pe $x=1$ pct de extrem

4) dacă $a,b,c>0$ și $a^x+b^x+c^x \geq 3$, $\forall x\in\mathbb{R}$, se cere $a\cdot b\cdot c$

5) dacă $a,b>0$ și $a^x+b^x \geq 2$, $\forall x\in\mathbb{R}$, se cere $a\cdot b$

6) $a=?$, $a>0$ dacă $a^x \geq x+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$

7) $a=?$, $a>0$ dacă $\ln x \geq a\cdot \frac{x-1}{x}$, $\forall x>0$

8) dacă $a,b>0$ și $a^x-b^x \geq x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, calculați $\frac{a}{b}$ pt $b\geq 1$

9) dacă $a>0$ și $a^x+x^3 \geq \frac{1-a}{a}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, se cere $a^{\frac{1}{a}}$

10) $a=?$, $a>0$ dacă $2^x+a^x \geq 3^x+4^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Dacă $a, b > 0$ și $a^x + b^x \geq a+b, \forall x \in \mathbb{R}$ se cere $a^a \cdot b^b = ?$ 1

$E_1)$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x + b^x \Rightarrow$ ineg enunț este $f(x) \geq a+b$

$E_2)$ obs. că $a+b = f(1) \Rightarrow$ ineg enunț

$f(x) \geq f(1), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 1$ pct MINIM

$E_3)$ f derivabilă în $x=1$, $x=1$ pct extrem $\xrightarrow{\text{T. FERMAT}} f'(1) = 0$

$E_4)$ $f'(x) = a^x \ln a + b^x \ln b$

$f'(1) = 0 \Leftrightarrow a \ln a + b \ln b = 0$

$\Leftrightarrow \ln a^a + \ln b^b = 0$

$\Leftrightarrow \ln(a^a b^b) = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{a^a b^b = 1}$

Fie $f(x) = e^x - ax$, $a > 0$

Se cere $a = ?$ dacă $f(x) \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

E1) dacă facem tabel de variație pt f o să ajungem la $a(1 - \ln a) \geq 1$ care nu se poate rezolva, căutăm altă metodă

E2) Obs. că $f(0) = e^0 - 0 = 1$

$\Rightarrow$ ar trebui găsit a cu $f(x) \geq f(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

E3) $\Rightarrow x = 0$ pct de MINIM $\xrightarrow{\text{T. FERMAT}} f'(0) = 0$

E4) $f'(x) = (e^x - ax)' = e^x - a$

$f'(0) = 0 \Rightarrow e^0 - a = 0 \Rightarrow 1 - a = 0$

$\Rightarrow a = 1$ val. posibilă

E5) $a = 1 \Rightarrow f(x) = e^x - x$, tabel de variație

$f'(x) = e^x - 1$, $f'(x) = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

x		0	
f'	$- - - -$	0	$+ + +$
f	$\searrow$	1	$\nearrow$

$f'(-1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 < 0$; $f'(1) = e - 1 > 0$

$f(0) = e^0 - 0 = 1 \Rightarrow$ tabel $f(x) \geq 1$

$\Rightarrow \boxed{a = 1}$ CORECTĂ

Fie $a, b, c > 0$ cu

$$a^x + b^x + c^x \geq 3, \forall x \in \mathbb{R},$$

Calculați $a \cdot b \cdot c$

E1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x + b^x + c^x$

E2) Obs. că $3 = f(0) \Rightarrow$ relația din ip. devine: $f(x) \geq f(0), \forall x \in \mathbb{R}$

E3) $\Rightarrow x = 0$ pct MINIM $\Rightarrow x = 0$ pct EXTREM

E4) Din T. Fermat $\Rightarrow f'(0) = 0$

$$f'(x) = a^x \ln a + b^x \ln b + c^x \ln c$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow 1 \ln a + 1 \ln b + 1 \ln c = 0$$

$$\Rightarrow \ln(abc) = 0$$

$$\Rightarrow abc = 1$$

Dacă $a, b > 0$ și $a^x - b^x \geq x, \forall x \in \mathbb{R}$, ...

cere $\frac{a}{b}$ dacă $b \geq 1$

$E_1)$ $a^x - b^x \geq x \Leftrightarrow a^x - b^x - x \geq 0$

$a^x - b^x - x \Rightarrow$

$E_2)$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x - b^x - x$

inegalitatea cerută : $f(x) \geq 0$

$E_3)$ încerc să găsesc α a. î. $0 = f(\alpha)$

obs. că $f(0) = 1 - 1 - 0 \Rightarrow f(0) = 0$

$\Rightarrow$ știm : $f(x) \geq f(0), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = 0$ MINIM

$E_4)$ f derivabilă în $x = 0$; $x = 0$ pct extrem $\Big\} \xrightarrow{T.\ FERMAT} f'(0) = 0$

$E_5)$ $f'(x) = a^x \ln a - b^x \ln b - 1$

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot \ln a - 1 \ln b - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \ln a - \ln b = 1 \Rightarrow \ln \frac{a}{b} = 1$

$\Rightarrow \frac{a}{b} = e^1 \Rightarrow \boxed{\frac{a}{b} = e}$

Găsiți $a\in\mathbb{R}$, $a>0$ dacă are loc

$$2^x+a^x\geq 3^x+4^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

E1) ineg $\Leftrightarrow 2^x+a^x-3^x-4^x\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

E2) fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x+a^x-3^x-4^x \Rightarrow$ inegali devine $f(x)\geq 0$, apoi caut un α astfel încât $0=f(\alpha)$ și observ că $f(0)=1+1-1-1\Rightarrow f(0)=0$

$\Rightarrow$ ineg devine $f(x)\geq f(0),\ \forall x\in\mathbb{R}$

E3) cum f derivabilă în $x=0 \xRightarrow{\text{T. Fermat}} f'(0)=0$

E4) $f'(x)=2^x\ln 2+a^x\ln a-3^x\ln 3-4^x\ln 4\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(0)=\ln 2+\ln a-\ln 3-\ln 4=\ln\frac{2a}{12}$ și cum

$f'(0)=0\Rightarrow \ln\frac{2a}{12}=0\Rightarrow \frac{a}{6}=1\Rightarrow a=6$ valoare posibilă

E5) studiem dacă $a=6$ e valoare corectă, pt

$a=6\Rightarrow f(x)=2^x+6^x-3^x-4^x$, studiem dacă pt $a=6$

avem $f(x)\geq 0$

$f'(x)=2^x\ln 2+6^x\ln 6-3^x\ln 3-4^x\ln 4$, studiem altfel dacă

și nu putem rezolva $f'(x)=0$, $\quad 6^x-3^x-4^x\geq 0\Leftrightarrow$

$f(x)\geq 0\Leftrightarrow \underline{2^x+6^x-3^x-4^x}\geq 0 \Leftrightarrow (2^x-3^x)(1-2^x)\geq 0$

$2^x(1-2^x)+3^x(2^x-1)\geq 0\Leftrightarrow$

E6) pt ca $(2^x-3^x)(1-2^x)=0\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x=3^x\Rightarrow x=0 \\ \text{sau} \\ 2^x=1\Rightarrow x=0\end{cases}$

x	-1 $\quad$ 0
2^x-3^x	$+\ +\ +\ 0\ -\ -\ -$
$1-2^x$	$+\ +\ +\ 0\ -\ -\ -$
$f(x)$	$+\ +\ 0\ +\ +$

$\Rightarrow f(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow 2^x+6^x\geq 3^x+4^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$