DERIVAREA FUNCȚIILOR COMPUSE

Calculați $f'(x)$ și $g'(x)$ în fiecare din situațiile următoare:

1) $f(x) = \sin(\ln(\cos x))$ și
$g(x) = \cos^3(\ln\sqrt{x})$

2) $f(x) = \sin(\ln^3(5x+1))$ și
$g(x) = 2^{\cos^3(\sin x)}$

3) $f(x) = 2^{\sin x^3}$ și $g(x) = \sin^3(2^x)$

4) $f(x) = \cos^3(\sin x)$ și
$g(x) = tg(\arcsin x)$

5) $f(x) = \arcsin \frac{3x+1}{\cos x}$ și
$g(x) = 2^{\sin(\cos x)}$

6) $f(x) = \sin^4(\cos(\ln x))$ și
$g(x) = \sqrt[5]{\sin\left(\cos \frac{x^2}{tg x}\right)}$

7) $f(x) = ctg\left(\arccos \frac{\log_3 x}{\sqrt{x}}\right)$
și $g(x) = \log_5(e^{2x})$

8) $f(x) = \sqrt{\sin x}$ și $g(x) = \frac{1}{\sin^3 x}$

9) $f(x) = \sqrt[3]{arctg^2 x}$ și
$g(x) = arctg^2\left(\sqrt[5]{x}\right)$

10) $f(x) = ctg^3\left(\arcsin \frac{2x+1}{x-3}\right)$ și
$g(x) = \sin(arcctg((4x+1)\cdot\cos x))$

11) $f(x) = \ln(x^3+x)$ și
$g(x) = \sqrt[5]{\sin^2 x + \cos x}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x) = \sin(\ln(\cos x))$ și $g(x) = \cos^3(\ln\sqrt{x})$

Se cere $f'(x)$ și $g'(x)$

$E_1)$ $f'(x) = \left(\sin\left(\underbrace{\ln(\cos x)}_{u}\right)\right)' =$

$= \cos(\ln(\cos x)) \cdot (\ln(\cos x))'$

$E_2)$ $f'(x) = \cos(\ln(\cos x)) \cdot \dfrac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)'$

$f'(x) = \cos(\ln(\cos x)) \cdot \dfrac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)$

$E_1)$ $g'(x) = \left(\cos^3(\ln\sqrt{x})\right)' = 3\cos^2(\ln\sqrt{x}) \cdot (\cos(\ln\sqrt{x}))' =$

$= 3\cos^2(\ln\sqrt{x}) \cdot (-\sin(\ln\sqrt{x})) \cdot (\ln\sqrt{x})' =$

$= 3\cos^2(\ln\sqrt{x}) \cdot [-\sin(\ln\sqrt{x})] \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' =$

$= 3\cos^2(\ln\sqrt{x}) \cdot [-\sin(\ln\sqrt{x})] \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\sin(\ln^3(5x+1))$ şi $g(x)=2^{\cos^3(\sin x)}$

Se cere $f'(x)$ şi $g'(x)$

$f'(x)=?$

E1) $f'(x)=\left(\sin(\underbrace{\ln^3(5x+1)}_{u})\right)'=$

$$=\cos(\ln^3(5x+1))\cdot(\ln^3(5x+1))'$$

E2) $f'(x)=\cos(\ln^3(5x+1))\cdot\left(\left(\underbrace{\ln(5x+1)}_{u}\right)^3\right)'$

$$=\cos(\ln^3(5x+1))\cdot 3(\ln(5x+1))^2\cdot(\ln(\underbrace{5x+1}_{u}))'$$

$$=\cos(\ln^3(5x+1))\cdot 3(\ln(5x+1))^2\cdot\frac{1}{5x+1}\cdot(5x+1)'=$$

$$=\cos(\ln^3(5x+1))\cdot 3(\ln(5x+1))^2\cdot\frac{1}{5x+1}\cdot 5$$

E4) $g'(x)=\left(2^{\cos^3(\sin x)}\right)'=2^{\cos^3(\sin x)}\cdot\ln 2\cdot(\cos^3(\sin x))'=$

$$=2^{\cos^3(\sin x)}\cdot\ln 2\cdot 3\cos^2(\sin x)\cdot(\cos(\sin x))'=$$

$$=2^{\cos^3(\sin x)}\cdot\ln 2\cdot 3\cos^2(\sin x)\cdot(-\sin(\sin x))\cdot\cos x$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x) = 2^{\sin x^3}$ și $g(x) = \sin^3(2^x)$

Se cere $f'(x)$ și $g'(x)$

$$E_1)\quad f'(x) = \left(2^{\underbrace{\sin x^3}_{u}}\right)' = 2^{\sin x^3} \cdot \ln 2 \cdot \left(\underbrace{\sin x^3}_{u}\right)'$$

$$E_2)\quad f'(x) = 2^{\sin x^3} \cdot \ln 2 \cdot \cos x^3 \cdot (x^3)'$$

$$f'(x) = 2^{\sin x^3} \cdot \ln 2 \cdot \cos x^3 \cdot 3x^2$$

$$E_1)\quad g'(x) = \left(\sin^3(2^x)\right)' = 3\sin^2(2^x) \cdot \left(\sin(2^x)\right)' =$$

$$= 3\sin^2(2^x) \cdot \cos(2^x) \cdot (2^x)' =$$

$$= 3\sin^2(2^x) \cdot \cos(2^x) \cdot 2^x \cdot \ln 2$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați $f'(x)$ și $g'(x)$ dacă

$$f(x)=\cos^3(\sin x) \text{ și } g(x)=tg(\arcsin x)$$

E1) $f'(x)=\left(\cos^3(\sin x)\right)'=3\cos^2(\sin x)\cdot(\cos(\sin x))'=$

$=3\cos^2(\sin x)\cdot(-\sin(\sin x))\cdot(\sin x)'=$

$=3\cos^2(\sin x)\cdot(-\sin(\sin x))\cdot\cos x$

E2) $g'(x)=\left(tg(\arcsin x)\right)'=\dfrac{1}{\cos^2(\arcsin x)}\cdot(\arcsin x)'=$

$=\dfrac{1}{\cos^2(\arcsin x)}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați $f'(x)$ și $g'(x)$ pentru

$$f(x) = \sin^4(\cos(\ln x)) \text{ și } g(x) = \sqrt[5]{\sin\left(\cos\frac{x^2}{tg\, x}\right)}$$

E1) $f'(x) = \left(\sin^4(\cos(\ln x))\right)' = 4\sin^3(\cos(\ln x)) \cdot (\sin(\cos(\ln x)))' =$

$= 4\sin^3(\cos(\ln x)) \cdot \cos(\cos(\ln x)) \cdot (\cos(\ln x))' =$

$$\boxed{f' = 4\sin^3(\cos(\ln x)) \cdot \cos(\cos(\ln x)) \cdot (-\sin(\ln x)) \cdot \frac{1}{x}}$$

E2) $$g'(x) = \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{\left(\sin\left(\cos\frac{x^2}{tg\, x}\right)\right)^4}} \cdot \left(\sin\left(\cos\frac{x^2}{tg\, x}\right)\right)'$$

$$= \underbrace{\frac{1}{5\sqrt[5]{\left(\sin\left(\cos\frac{x^2}{tg\, x}\right)\right)^4}} \cdot \left(\cos\left(\cos\frac{x^2}{tg\, x}\right)\right) \cdot \left(-\sin\frac{x^2}{tg\, x}\right)}_{g_1(x)} \cdot \left(\frac{x^2}{tg\, x}\right)'$$

$$= g_1(x) \cdot \frac{(x^2)'\, tg\, x - x^2 \cdot (tg\, x)'}{tg^2 x} =$$

$$= g_1(x) \cdot \frac{2x\, tg\, x - x^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{tg^2 x}$$

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{\left(\sin\left(\cos\frac{x^2}{tg\, x}\right)\right)^4}} \cdot \cos\left(\cos\frac{x^2}{tg\, x}\right) \cdot \left(-\sin\frac{x^2}{tg\, x}\right) \cdot \frac{2x\, tg\, x - \frac{x^2}{\cos^2 x}}{tg^2 x}}$$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x) = \ln(x^3+x)$, $g(x) = \sqrt[5]{\sin^2 x + \cos x}$

$f'(x)$ și $g'(x)$

E1) $f'(x) = \left(\ln(\underbrace{x^3+x}_{u})\right)' = \dfrac{1}{x^3+x} \cdot (x^3+x)'$

s-a folosit: $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$

E2) $f'(x) = \dfrac{1}{x^3+x} \cdot (3x^2+1) = \dfrac{3x^2+1}{x^3+x}$

E1) $g'(x) = \left(\sqrt[5]{\sin^2 x + \cos x}\right)' = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{(\sin^2 x+\cos x)^4}} (\sin^2 x + \cos x)'$

$= \dfrac{1}{5\sqrt[5]{(\sin^2 x+\cos x)^4}} \cdot (2 \sin x \cdot \cos x - \sin x)$

Prof. Ovidiu Bădescu