CONVEXITATE, CONCAVITATE ȘI PUNCTE DE INFLEXIUNE

Găsiți intervalele de convexitate (concavitate) și punctele de inflexiune pentru:

1) $f(x)=x^3+3x^2$

2) $f(x)=x^3-5x^2+3x-5$

3) $f(x)=x^3-6x^2+12x+4$

4) $f(x)=-x^4-2x^3+36x^2+x$

5) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

6) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$

7) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

8) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+12}$

9) $f(x)=e^{-x^2}$

10) $f(x)=(1+x^2)e^x$

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x\ln x}$, arătați că f convexă pe $(0;\infty)$

$$E_1)\ f'(x)=\left(e^{x\ln x}\right)'=e^{x\ln x}(x\ln x)'=$$

$$=e^{x\ln x}\left(1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=e^{x\ln x}(\ln x+1)$$

$$E_2)\ f''(x)=\left(e^{x\ln x}(\ln x+1)\right)'=\left(e^{x\ln x}\right)'(\ln x+1)+e^{x\ln x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)'(\ln x+1)+e^{x\ln x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=e^{x\ln x}\left(1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)(\ln x+1)+e^{x\ln x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=e^{x\ln x}(\ln x+1)^2+e^{x\ln x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=e^{x\ln x}\left((\ln x+1)^2+\frac{1}{x}\right)$$

$$E_3)\ \text{Dar, } \left.\begin{array}{l} e>0\Rightarrow e^{x\ln x}>0 \\ (\ln x+1)^2\geq 0\Rightarrow(\ln x+1)^2+\frac{1}{x}>0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x)>0 \text{ pe } (0;\infty)$$

$$\Rightarrow f \text{ convexă pe } (0;\infty)$$

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$. Arătați că f este convexă pe $(1;\infty)$

E_1) Vom arăta că $f''(x)\geq 0, \forall x\in(1;\infty)$

E_2) $$f'(x)=\left(\frac{1}{x^2+1}\right)'=\frac{1'\cdot(x^2+1)-1\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{0-2x}{(x^2+1)^2}=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

E_3) $$f''(x)=\left(-\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right)'=-\left(\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right)'=-\frac{(2x)'(x^2+1)^2-2x((x^2+1)^2)'}{[(x^2+1)^2]^2}$$

$$=-\frac{2(x^2+1)^2-2x\cdot 2(x^2+1)^1\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^4}=-\frac{2(x^2+1)^2-4x(x^2+1)^1\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$=-\frac{(x^2+1)[2(x^2+1)-8x^2]}{(x^2+1)^4}=-\frac{(2x^2+2-8x^2)}{(x^2+1)^3}=$$

$$=-\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}=\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

E_4) semnul lui $f''(x)$ este acelaşi cu semnul lui $6x^2-2$ deoarece $(x^2+1)^3>0$

E_5) $6x^2-2=0 \Rightarrow x^2=\frac{2}{6} \Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

x		$-\sqrt{\frac{1}{3}}$		$\sqrt{\frac{1}{3}}$		1	
$6x^2-2$	$+\ +$	0	$-\ -\ -\ -$	0	$+$	$+$	$+$

ne interesează doar pentru $x\in(1;\infty)$

$\Rightarrow 6x^2-2>0$ pt $x\in(1;\infty)$

$\Rightarrow f''(x)>0$ pt $x\in(1;\infty)$

$\Rightarrow f$ convexă pe $(1;\infty)$

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2012^x$

Arătați că f convexă

$E_1)$ $f'(x) = (2012^x)' = 2012^x \cdot \ln 2012$

pentru că $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$E_2)$ $f''(x) = (2012^x \cdot \underbrace{\ln 2012}_{})' = \cancel{2012 \cdot 2012^x}$

$= \ln 2012 \cdot (2012^x)' = \ln 2012 \cdot 2012^x \ln 2012$ (număr)

$= (\ln 2012)^2 \cdot 2012^x > 0$

$E_3)$ $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ convexă

Obs.: s-a folosit $(\alpha \cdot f)' = \alpha \cdot f'$, în cazul nostru $\alpha = \ln 2012$ număr

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + e^x$

Arătați că f convexă pe $\mathbb{R}$

$E_1)$ Arătam că $f''(x) \geq 0$

$E_2)$ $f'(x) = (x^2 + e^x)' = 2x + e^x$

$$f''(x) = (2x + e^x)' = 2 + e^x$$

$E_3)$ Deoarece $e > 0 \Rightarrow e^x > 0 \Rightarrow 2 + e^x > 0$

$$\Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f''(x) \geq 0 \Rightarrow$$

f convexă

Fie $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=e^{3x}$ și $f_{n+1}(x)=f_n'(x)$

Arătați că f_1 convexă pe $\mathbb{R}$ T147 III 1(a)

E1) Din $f_{n+1}(x)=f_n'(x) \Rightarrow f_1(x)=f_0'(x) \Rightarrow$

$$f_1(x)=(e^{3x})'=e^{3x}\cdot(3x)'=e^{3x}\cdot 3$$

E2) pt a arăta că f_1 convexă, calc. $f''(x)\geq 0$ (?)

$$f_1'(x)=(e^{3x}\cdot 3)'=3\cdot(e^{3x})'=3\cdot e^{3x}\cdot 3$$

$$\Rightarrow f_1'(x)=9e^{3x}$$

$$f_1''(x)=(9e^{3x})'=9(e^{3x})'=9\cdot e^{3x}\cdot 3=27e^{3x}$$

E3) $f_1''(x)=0 \Rightarrow 27\cdot e^{3x}=0 \Rightarrow e^{3x}=0$ fals

(pt că dacă $a>0 \Rightarrow a^{\cdots}>0$)

E4)

x	
f_1''	+ + + + + +
f	

$f_1''(0)=27\cdot e^{0}=27>0 \Rightarrow f_1''(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f_1$ convexă