BIJECTIVITATEA ȘI DERIVATA PUNCTUALĂ A INVERSEI UNEI FUNCȚII

Studiați bijectivitatea următoarelor funcții și, în caz afirmativ, calculați derivata funcției inverse cerute:

1) $f:\mathbb{R}\to(0;\infty)$, $f(x)=3^x+5^x$,
$(f^{-1})'(8)=?$, $(f^{-1})''(2)=?$

2) $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\ln x$,
$(f^{-1})'(1)=?$, $(f^{-1})''(1+e^2)=?$

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5+x$,
$(f^{-1})'(10)=?$ și $(f^{-1})''(2)$

4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5-x+1$.
$(f^{-1})'(1)=?$, $(f^{-1})''(31)=?$

5) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3^x+x^3$,
$(f^{-1})'(1)=?$, $(f^{-1})''(4)=?$

6) $f:\mathbb{R}\to(0;\infty)$, $f(x)=e^x+x$,
$(f^{-1})'(1)=?$, $(f^{-1})''(e+1)$

7) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x+x+1$
$(f^{-1})'(7)=?$, $(f^{-1})''(4)=?$

8) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x+x^2+x$
$(f^{-1})'(9)=?$, $(f^{-1})'(4)=?$

9) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg} x+x$,
$(f^{-1})'(0)=?$, $(f^{-1})''\left(1+\frac{\pi}{4}\right)=?$

10) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arcsin x-x$
$(f^{-1})'\left(1-\frac{\pi}{2}\right)=?$, $(f^{-1})''\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=?$

Fie $f:\mathbb{R}\to(0;\infty)$, $f(x)=3^x+5^x$. Studiați bijectivitatea lui f și calculați $(f^{-1})'(8)=?$ și $(f^{-1})''(2)=?$

E1) f inj: $f'(x)=\underbrace{3^x\ln 3}_{>0}+\underbrace{5^x\ln 5}_{>0}\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ s$\nearrow$ $\Rightarrow f$ injectivă (1)

E2) f surj: calculăm Im f

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(3^x+5^x)\overset{3^{-\infty}+5^{-\infty}}{=\!=\!=}0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(3^x+5^x)\overset{3^{\infty}+5^{\infty}}{=\!=\!=}\infty$$

f continuă

x	$-\infty$					∞
f'	+	+	+	+	+	+
f	0		$\nearrow$			∞

Im f = Cd f $\Rightarrow f$ surjectivă (2)

E3) Din (1) + (2) $\Rightarrow$ f bijectivă $\Rightarrow$ f inversabilă

E4) $\exists$ formula: $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$ cu $f(x_0)=y_0$

$\Rightarrow (f^{-1})'(8)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$ cu $f(x_0)=8$

obs. că $f(1)=8$ și cum f biject $\Rightarrow x_0=1$ sol unică

$\Rightarrow (f^{-1})'(8)=\dfrac{1}{f'(1)}$, $f'(x)=3^x\ln 3+5^x\ln 5\Rightarrow f'(1)=3\ln 3+5\ln 5$

$\Rightarrow f'(1)=\ln(3^3\cdot 5^5)$

$\Rightarrow \boxed{(f^{-1})'(8)=\dfrac{1}{\ln(3^3\cdot 5^5)}}$

E5) $\exists$ formula $\boxed{(f^{-1})''(y_0)=-\dfrac{f''(x_0)}{(f'(x_0))^3}}$ cu $f(x_0)=y_0$

$\Rightarrow (f^{-1})''(2)=-\dfrac{f''(x_0)}{(f'(x_0))^3}$ cu $f(x_0)=2$ și obs. $x_0=0\Rightarrow \boxed{(f^{-1})''(2)=-\dfrac{f''(0)}{(f'(0))^3}}$

Studiați bijectivitatea următoarelor funcții și, în caz afirmativ, calculați $(f^{-1})'(1)$ și $(f^{-1})''(e+1)$ pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată de $f(x)=e^x+x$

$E_1)$ $f'(x)=e^x+1>0 \Rightarrow f_s\nearrow \Rightarrow f$ injectivă (1)

$E_2)$ f surj: arăt. că $\operatorname{Im} f = Cd f$

x	$-\infty$		∞
f'	$+\ +\ +\ +$		
f	$-\infty$	$\nearrow$	∞

$\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+x) \overset{0-\infty}{=\!=} -\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}(e^x+x) \overset{\infty+\infty}{=\!=} \infty$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f=(-\infty;\infty) \Rightarrow \operatorname{Im} f = Cd f \Rightarrow f$ surjectivă (2)

$E_3)$ din (1) + (2) $\Rightarrow f$ bijectivă $\Rightarrow \exists f^{-1}$

$E_4)$ TEORIE: $\boxed{(f^{-1})'(y_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}}$ unde pe x_0 îl găsim din $f(x_0)=y_0$

$\Rightarrow (f^{-1})'(1)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$ cu $\left.\begin{array}{l} f(x_0)=1 \\ f \text{ biject} \end{array}\right\} \Rightarrow x_0=0$ sol unică

obs. că $f(0)=1$,

$\Rightarrow (f^{-1})'(1)=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{2}$

$E_5)$ TEORIE: $\boxed{(f^{-1})''(y_0)=-\dfrac{f''(x_0)}{(f'(x_0))^3}}$ unde pe x_0 îl găsim din $f(x_0)=y_0$

$\Rightarrow (f^{-1})''(e+1)=-\dfrac{f''(e)}{(f'(e))^3}$ cu $f(x_0)=e+1$, obs. că $x_0=e$ sol, f bij $\Rightarrow x_0=e$ sol unică

$(f^{-1})''(e+1)=-\dfrac{f''(e)}{(f'(e))^3}=-\dfrac{e^e}{(e^e+1)^3}$