

INELE ȘI CORPURI

Studiați dacă $(\mathbb{R}, *, 0)$
e INEL COMUTATIV în fiecare
din situațiile:

1) $x * y = x + y - 4$
 $x \circ y = xy - 4x - 4y + 20$

2) $x * y = x + y + 1$
 $x \circ y = xy + x + y$

3) $x * y = x + y - 2$
 $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$

4) $x * y = x + y + 3$
 $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$

5) $x * y = x + y - 6$
 $x \circ y = xy - 6x - 6y + 42$

Studiați dacă $(\mathbb{R}, *, 0)$
e CORP COMUTATIV în fiecare
din situațiile:

1) $x * y = x + y - 5$
 $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$

2) $x * y = x + y + 2$
 $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$

3) $x * y = x + y - 3$
 $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$

4) $x * y = x + y + 4$
 $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$

5) $x * y = x + y - 1$
 $x \circ y = xy + x + y + 2$

Arată că $(\mathbb{R}, *, 0)$ INEL COMUTATIV unde
 $x * y = x + y - 4$ și $x \circ y = xy - 4x - 4y + 20$.

E₁) Aratăm că:

- a) $(\mathbb{R}, *)$ grup abelian
- b) (\mathbb{R}, \circ) monoid comutativ
- c) \circ distributiv față de $*$

E₂) $(\mathbb{R}, *)$ grup abelian

(G1) lege internă pe \mathbb{R}

$\forall x, y \in \mathbb{R} \xrightarrow{(?)} x * y \in \mathbb{R}$

$\forall x, y \in \mathbb{R} \rightarrow x * y = x + y - 4 \in \mathbb{R}$ c.d.v.
 $\Rightarrow *$ lege internă pe \mathbb{R}

(G2) * comutativă pe \mathbb{R}

$\forall x, y \in \mathbb{R} \xrightarrow{(?)} x * y = y * x$

$x * y = x + y - 4 \rightarrow$ egalitate \rightarrow
 $y * x = y + x - 4 \quad * \text{ comut pe } \mathbb{R}$

(G3) * asociativă pe \mathbb{R}

$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \rightarrow (x * y) * z = x * (y * z)$

$(x * y) * z = (x + y - 4) * z =$
 $= x + y - 4 + z - 4 = x + y + z - 8$

$x * (y * z) = x * (y + z - 4) =$
 $= x + y + z - 4 - 4 = x + y + z - 8$

$\Rightarrow *$ asociativă pe \mathbb{R}

(G4) * are el neutru pe \mathbb{R}

$\exists e \in \mathbb{R} \text{ a.i. } \forall x \in \mathbb{R}; x * e = e * x = x$

$x * e = x \rightarrow x + e - 4 = x \rightarrow e = 4 \in \mathbb{R}$

Deoarece $*$ comut $\rightarrow x * e = e * x$
 $\Rightarrow e = 4$ este el neutru pe \mathbb{R}

(G5) * are toate elem simetrizabile

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R} \text{ cu } x * x' = x' * x = e$

$x * x' = e \rightarrow x + x' - 4 = 4 \rightarrow x' = 8 - x$

Deoarece $*$ comut $\rightarrow x * x' = x' * x \rightarrow$
 $x' = 8 - x$ simetrizabil lui $x, \forall x \in \mathbb{R}$

E₃) (\mathbb{R}, \circ) monoid comutativ

(M1) o lege internă pe \mathbb{R}

$\forall x, y \in \mathbb{R} \xrightarrow{(?)} x \circ y \in \mathbb{R}$

$\forall x, y \in \mathbb{R} \rightarrow x \circ y = xy - 4x - 4y + 20 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \circ$ lege internă pe \mathbb{R}

(M2) o comutativă pe \mathbb{R}

$\forall x, y \in \mathbb{R} \rightarrow x \circ y = y \circ x$

$x \circ y = xy - 4x - 4y + 20 \rightarrow$ egalitate

$y \circ x = yx - 4y - 4x + 20$

$\Rightarrow \circ$ comut pe \mathbb{R}

(M3) o asociativă pe \mathbb{R}

$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \rightarrow (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

$(x \circ y) \circ z = (xy - 4x - 4y + 20) \circ z =$

$= (xy - 4x - 4y + 20)z - 4(xy - 4x - 4y + 20) - 4z + 20$

$= xyz - 4xz - 4yz - 4xy + 16x + 16y + 16z - 60$

$x \circ (y \circ z) = x \circ (yz - 4y - 4z + 20) =$

$= x(yz - 4y - 4z + 20) - 4x - 4(yz - 4y - 4z + 20) + 20$

$= xyz - 4xy - 4xz - 4yz + 16x + 16y + 16z - 60$

$\Rightarrow \circ$ asociativă pe \mathbb{R}

(M4) o are el neutru pe \mathbb{R}

$\exists e \in \mathbb{R} \text{ a.i. } \forall x \in \mathbb{R}; x \circ e = e \circ x = x$

$x \circ e = x \rightarrow xe - 4x - 4e + 20 = x$

$\Rightarrow x(e - 5) = 5(e - 5), \forall x \in \mathbb{R}$ și egalând

coef $\Rightarrow e = 5 \in \mathbb{R}$. Deoarece \circ comut pe \mathbb{R}

$\Rightarrow e = 5$ el neutru pe \mathbb{R}

E₄) o distributivă față de $*$

(b1): $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \rightarrow x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$

$x \circ (y * z) = x \circ (y + z - 4) = x(y + z - 4) - 4x -$

$- 4(y + z - 4) + 20 = \boxed{xy + xz - 8x - 4y - 4z + 36}$

$(x \circ y) * (x \circ z) = (xy - 4x - 4y + 20) * (xz - 4x - 4z + 20) =$

$= x(yz - 4y - 4z + 20) + xz - 4x - 4z + 20 - 4 =$

$= \boxed{xy + xz - 8x - 4y - 4z + 36}$

(b2): $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \rightarrow (x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z)$

$(x * y) \circ z = (x + y - 4) \circ z = (x + y - 4)z - 4(x + y - 4) -$

$- 4z + 20 = xz + yz - 4z - 4x - 4y + 16 - 4z + 20$

$= \boxed{xz + yz - 8z - 4x - 4y + 36}$

$(x \circ z) * (y \circ z) = (xz - 4x - 4z + 20) * (yz - 4y - 4z + 20) =$

$- 4z + 20 = xz - 4x - 4z + 20 + yz - 4y - 4z + 20$

$= \boxed{xz + yz - 4x - 4y - 8z + 36}$

$\Rightarrow \circ$ distributivă față de $*$

E₅) Din E₂, E₃, E₄ $\Rightarrow (\mathbb{R}, *, \circ)$ este

INEL COMUTATIV

Studiati dacă $(\mathbb{R}, *, 0)$ e o grup comutativ unde

$x * y = x + y - 5$ și $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$

E₁) Arătați că:

- a) $(\mathbb{R}, *)$ grup abelian
- b) $(\mathbb{R} \setminus \{5\}, \circ)$ grup abelian
- c) o distrib. față de *

E₂) $(\mathbb{R}, *)$ grup abelian

(G₁) * lege internă pe \mathbb{R}

$\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x * y \in \mathbb{R}$

$\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x + y - 5 \in \mathbb{R} \Rightarrow x * y \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow *$ lege internă pe \mathbb{R}

(G₂) * comutativă pe \mathbb{R}

$\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x * y = y * x$

$x * y = x + y - 5$
 $y * x = y + x - 5$ \Rightarrow egalitate \Rightarrow * comut pe \mathbb{R}

(G₃) * asociativă pe \mathbb{R}

$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z)$

$(x * y) * z = (x + y - 5) * z = x + y - 5 + z - 5 =$
 $x + y + z - 10$ (1)

$x * (y * z) = x * (y + z - 5) = x + y + z - 5 - 5 =$
 $x + y + z - 10$ (2)

din (1) + (2) $\Rightarrow *$ asociat pe \mathbb{R}

(G₄) * are el neutru pe \mathbb{R}

$\exists e \in \mathbb{R}$ a.i. $\forall x \in \mathbb{R}; x * e = e * x = x$

$x * e = x \Rightarrow x + e - 5 = x \Rightarrow e = 5 \in \mathbb{R}$

Deoarece * comut $\Rightarrow x * e = e * x$

$\Rightarrow e = 5$ el neutru pe \mathbb{R}

(G₅) * are toate elem simetrice pe \mathbb{R}

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}$ cu $x * x' = x' * x = e$

$x * x' = e \Rightarrow x + x' - 5 = 5 \Rightarrow x' = 10 - x$

Deoarece * comut $\Rightarrow x * x' = x' * x$

$x' = 10 - x$ este simetricul lui x , $\forall x \in \mathbb{R}$

E₃) $(\mathbb{R} \setminus \{5\}, \circ)$ grup comutativ

(G₁) o lege internă pe $\mathbb{R} \setminus \{5\}$

$\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{5\} \Rightarrow x \circ y \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$

$\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{5\} \Rightarrow x \circ y = xy - 5x - 5y + 30 \in \mathbb{R}$

(R.A.) $\forall x, y \neq 5 \Rightarrow x \circ y = 5 \Rightarrow xy - 5x - 5y + 30 = 5$

$\Rightarrow xy - 5x - 5y + 25 = 0 \Rightarrow x(y - 5) - 5(y - 5) = 0$

$\Rightarrow (x - 5)(y - 5) = 0 \Rightarrow x = 5$ sau $y = 5$, k.o.

(G₂) o comut pe $\mathbb{R} \setminus \{5\}$

$\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{5\} \Rightarrow x \circ y = y \circ x$

$x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$ \Rightarrow egalitate

$y \circ x = yx - 5y - 5x + 30$

(G₃) o asociat pe $\mathbb{R} \setminus \{5\}$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{5\} \Rightarrow (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

$(x \circ y) \circ z = (xy - 5x - 5y + 30) \circ z = (xy - 5x - 5y + 30)z - 5(xy - 5x - 5y + 30) - 5z + 30 =$
 $xy^2 - 5x^2 - 5y^2 - 5xy + 25x + 25y + 25z - 120 - 5z + 30 =$
 $= xy^2 - 5x^2 - 5y^2 - 5xy + 25x + 25y + 25z - 120$

Analogs, $x \circ (y \circ z) = \dots =$ același lucru ca sus \Rightarrow o asociat pe $\mathbb{R} \setminus \{5\}$

(G₄) o are el neutru pe $\mathbb{R} \setminus \{5\}$

$\exists e \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$ a.i. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$ să avem $x \circ e = e \circ x = x$

$x \circ e = x \Rightarrow xe - 5x - 5e + 30 = x \Rightarrow$

$e(x - 5) = 6(x - 5), \forall x \in \mathbb{R}$ și egalând coeficienții $\Rightarrow e = 6$. deoarece o comut $\Rightarrow e = 6$ el neutru pe $\mathbb{R} \setminus \{5\}$

(G₅) o are toate elem simetrice pe $\mathbb{R} \setminus \{5\}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}, \exists x' \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$ cu $x \circ x' = x' \circ x = e$

$x \circ x' = e \Rightarrow xx' - 5x - 5x' + 30 = 6 \Rightarrow$

$x'(x - 5) = 5x - 24$. Pt $x = 5 \Rightarrow x' \cdot 0 = 1$ fals

Pt $x \neq 5 \Rightarrow x' = \frac{5x - 24}{x - 5}$, arăd că $x' \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$

Sim(RA), pt $x' = 5 \Rightarrow \frac{5x - 24}{x - 5} = 5 \Rightarrow$

$5x - 24 = 5x - 25$ (k.o.) $\Rightarrow x' \neq 5 \Rightarrow x' \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$

Deoarece o comut $\Rightarrow x \circ x' = x' \circ x \Rightarrow x'$ simetric lui $x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{5\} \Rightarrow$ toate elem de $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ sînt simetrice

E₄) o distrib față de *

(B₁) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$

$x \circ (y * z) = x \circ (y + z - 5) = x(y + z - 5) -$

$- 5x - 5(y + z - 5) + 30 = xy + xz - 5x - 5y -$

$- 5z - 52 + 25 + 30 = xy + xz - 10x - 5y - 5z + 55$

$(x \circ y) * (x \circ z) = (xy - 5x - 5y + 30) * (xz - 5x - 5z + 30) =$

$xy - 5x - 5y + 30 + xz - 5x - 5z + 30 - 5 =$

$= xy + xz - 10x - 5y - 5z + 55$

$= xy + xz - 10x - 5y - 5z + 55$

(B₂) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow (x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z)$

$(x * y) \circ z = (x + y - 5) \circ z = (x + y - 5)z - 5(x + y - 5) -$

$- 5z + 30 = xz + yz - 5z - 5x - 5y + 25 - 5z + 30 =$

$= xz + yz - 5x - 5y - 10z + 55$

$(x \circ z) * (y \circ z) = (xz - 5x - 5z + 30) * (yz - 5y - 5z + 30) =$

$xz - 5x - 5z + 30 + yz - 5y - 5z + 30 - 5 =$

$= xz + yz - 5x - 5y - 10z + 55$

$= xz + yz - 5x - 5y - 10z + 55$

E₄) din E₂ - E₄) $\Rightarrow (\mathbb{R}, *, 0)$ e o grup comutativ

COMUTATIV