FOLOSIREA ELEMENTULUI GENERIC LA PROPRIETĂȚILE LEGILOR DE COMPOZIȚIE.

Studiați dacă următoarele legi sunt: a) interne b) comutative c) asociative d) au elem. neutru e) au toate elem. simetrizabile, în fiecare din situațiile următoare

I înmulțirea matricilor pe

1) $M=\left\{A(x) \middle| A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}$

2) $M=\left\{A(x) \middle| A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & -x\\ x & 1 & -\frac{x^2}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}$

3) $M=\left\{A(x) \middle| A(x)=\begin{pmatrix}1-x & 0 & x\\ 0 & 0 & 0\\ x & 0 & 1-x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}$

4) $M=\left\{A(x) \middle| A(x)=\begin{pmatrix}1 & \ln x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & x\end{pmatrix}, x>0\right\}$

5) $M=\left\{A(x) \middle| A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ 0 & e^x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}$

6) $M=\left\{A(x) \middle| A(x)=\begin{pmatrix}1+x & 0 & -x\\ 0 & 0 & 0\\ -x & 0 & 1+x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}$

7) $M=\left\{A(x) \middle| A(x)=\begin{pmatrix}1 & -\ln x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{x}\end{pmatrix}, x>0\right\}$

8) $M=\left\{A(x) \middle| A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & -x\\ 0 & \frac{1}{e^x} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}$

II compunerea funcțiilor pe

1) $G=\{f_n:(2;\infty)\to(2,\infty),\ f_n(x)=2+(x-2)^{2^n}, n\in\mathbb{Z}\}$

2) $G=\{f_n:(3;\infty)\to(3;\infty),\ f_n(x)=3+(x-3)^{5^n}, n\in\mathbb{Z}\}$

3) $G=\{f_n:(4;\infty)\to(4;\infty),\ f_n(x)=4+(x-4)^{7^n}, n\in\mathbb{Z}\}$

4) $G=\{f_n:(5;\infty)\to(5;\infty),\ f_n(x)=5+(x-5)^{2^n}, n\in\mathbb{Z}\}$

5) $G=\{f_n:(6,\infty)\to(6,\infty),\ f_n(x)=6+(x-6)^{3^n}, n\in\mathbb{Z}\}$

Fie $M=\left\{A(x) \mid A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}$. Studiați dacă înmulțirea matricilor este, pe M:

a) internă b) comut c) asociat d) are el neutru e) are toate elem. simetrizabile

a) $\cdot_m$ internă pe M

$\forall A(x), A(y)\in M \overset{(?)}{\Rightarrow} A(x)\cdot A(y)\in M$

$$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & y\\ -y & 1 & -\frac{y^2}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & y+x\\ -x-y & 1 & -xy-\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

deoarece $-xy-\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}=\frac{-(2xy+x^2+y^2)}{2}$

$=-\frac{(x+y)^2}{2} \Rightarrow$

$$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1 & 0 & x+y\\ -(x+y) & 1 & -\frac{(x+y)^2}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \boxed{A(x)\cdot A(y)=A(x+y)}$ (1)

cum $x,y\in\mathbb{R}\Rightarrow x+y\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$\Rightarrow A(x+y)\in M\Rightarrow \cdot_m$ internă pe M

b) $\cdot_m$ comut pe M

$\forall A(x), A(y)\in M \overset{(?)}{\Rightarrow} A(x)A(y)=A(y)A(x)$

folosind (1) $\Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}A(x)A(y)=A(x+y)\\ A(y)A(x)=A(y+x)\end{array}\right\}$ egalit

$\Rightarrow \cdot_m$ comut pe M

c) $\cdot_m$ asociat pe M: $\forall A(x), A(y), A(z)\in$

$\Rightarrow (A(x)\cdot A(y))\cdot A(z)=A(x)(A(y)\cdot A(z))$

folosind (1) $\Rightarrow$

$(A(x)\cdot A(y))A(z)=A(x+y)A(z)=A(x+y+z)$,

$A(x)\cdot(A(y)A(z))=A(x)A(y+z)=A(x+y+z)$

egalit $\Rightarrow \cdot_m$ asociat pe M

d) $\cdot_m$ are el neutru pe M $\Leftrightarrow$

$\exists A(e)\in M$ a.î. $\forall A(x)\in M$ avem

$A(x)A(e)=A(e)A(x)=A(x)$

folosind (1) $\Rightarrow$

$A(x)\cdot A(e)=A(x)\Leftrightarrow A(x+e)=A(x)$

$\Leftrightarrow x+e=x\Leftrightarrow e=0\in\mathbb{R}$

$A(e)=A(0)$

deoarece $\cdot_m$ comut pe $M\Rightarrow$

$A(x)A(e)=A(e)A(x)\Rightarrow A(0)$ el neutru

e) $\cdot_m$ are toate elem simetriz pe M

$\forall A(x)\in M$, $\exists A(x')\in M$ cu

$A(x)A(x')=A(x')A(x)=A(e)$

folosind (1) și că $e=0$, din

$A(x)A(x')=A(e)\Rightarrow A(x+x')=A(0)$

$\Rightarrow x+x'=0\Rightarrow x'=-x$

Cum $x\in\mathbb{R}\Rightarrow x'=-x\in\mathbb{R}$

deoarece $\cdot_m$ comut pe $M\Rightarrow$

$A(x)A(x')=A(x')A(x)\Rightarrow$

$A(x')=A(-x)$ este simetricul lui $A(x)$, $\forall A(x)\in M\Rightarrow$ toate elem lui M sunt simetrizabile

Fie $G=\{f_n:(2;\infty)\to(2;\infty),\ f_n(x)=2+(x-2)^{2^n},\ n\in\mathbb{Z}\}$

Studiați dacă compunerea funcțiilor este, pe G:

a) internă b) comut c) asociat d) are el neutru

e) are toate elem simetrizabile

a) $\circ$ lege internă pe M

$\forall f_n, f_m\in G \Rightarrow f_n\circ f_m\in G$

$(f_n\circ f_m)(x)=f_n(f_m(x))=$

$=f_n(2+(x-2)^{2^m})=$

$=2+(\cancel{2}+(x-2)^{2^m}-\cancel{2})^{2^n}=$

$=2+((x-2)^{2^m})^{2^n}=$

$=2+(x-2)^{2^m\cdot 2^n}=$

$=2+(x-2)^{2^{m+n}}=f_{n+m}(x)$

$f_n:(2;\infty)\to(2;\infty),\ f_m:(2;\infty)\to(2;\infty)$

$\Rightarrow f_n\circ f_m:(2;\infty)\to(2;\infty)$ și

(1) $\boxed{f_n\circ f_m=f_{n+m}}$ și $n,m\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow n+m\in\mathbb{Z}\Rightarrow \circ$ lege internă pe G

b) $\circ$ comut. pe G

$\forall f_n, f_m\in G\Rightarrow f_n\circ f_m=f_m\circ f_n$

$\left.\begin{array}{l} f_n\circ f_m=f_{n+m}\\ f_m\circ f_n=f_{m+n}\end{array}\right\}\Rightarrow$ egalitate $\Rightarrow$ $\circ$ comut pe G

c) $\circ$ asociat pe G

$\forall f_n, f_m, f_p\in G$ avem

$(f_n\circ f_m)\circ f_p=f_n\circ(f_m\circ f_p)$

$(f_n\circ f_m)\circ f_p=f_{n+m}\circ f_p=f_{n+m+p}$

$\ldots = f_{n+m+p}$

avem egalitate $\Rightarrow$ $\circ$ asociat pe G

d) $\circ$ are el neutru pe G

$\exists f_e\in G$ a.î. $\forall f_n\in G$ avem

$f_n\circ f_e=f_e\circ f_n=f_n$

din $f_n\circ f_e=f_n\Rightarrow f_{n+e}=f_n\Rightarrow$

$n+e=n\Rightarrow e=0\in\mathbb{Z}$

deoarece $\circ$ comut pe $G\Rightarrow$

$f_n\circ f_e=f_e\circ f_n\Rightarrow f_e=f_0$ este el neutru la $\circ$ pe G

e) $\circ$ are toate elem simetriz

$\forall f_n\in G, \exists f_{n'}\in G$ cu $f_n\circ f_{n'}=f_{n'}\circ f_n=f_e$

din $f_n\circ f_{n'}=f_e\Rightarrow f_{n+n'}=f_0$

$\Rightarrow n+n'=0\Rightarrow n'=-n\in\mathbb{Z}$

Cum $\circ$ comut pe $G\Rightarrow$

$f_n\circ f_{n'}=f_{n'}\circ f_n\Rightarrow f_{n'}=f_{-n}$ este simetricul elem f_n, $\forall f_n\in G$

$\Rightarrow$ toate elem din G sunt simetrizabile