PROPRIETĂȚILE LEGILOR DE COMPOZIȚIE PENTRU PERECHI

Studiați dacă următoarele legi sunt: a) interne; b) comutative; c) asociative d) au elem. neutru; e) au toate elem. simetrizabile, în fiecare din situațiile

1) $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $M = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

2) $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$ $M = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$

3) $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1)$, $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

4) $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2 + 1)$, $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

5) $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 y_2 + x_2 y_1, y_1 + y_2)$ $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

6) $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, y_1 \cdot y_2)$ $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

7) $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 x_2 + y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$ $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

8) $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (3x_1 x_2 + 7 y_1 y_2, 3x_1 y_2 + 3x_2 y_1)$ $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Pe $M=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ definim legea

$$(x_1,y_1)*(x_2,y_2)=(3x_1x_2+7y_1y_2,\ 3x_1y_2+3x_2y_1)$$

Studiați dacă legea $*$ pe M este a) internă b) comut; c) asociat d) are el neutru e) are toate elem. simetrizabile

---

a) $*$ lege internă pe M

$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in M \overset{(?)}{\Rightarrow} (x_1,y_1)*(x_2,y_2)\in M$

deoarece din ip $\Rightarrow$

$(x_1,y_1)*(x_2,y_2)=(3x_1x_2+7y_1y_2,\ 3x_1y_2+3x_2y_1)$

$\Rightarrow *$ lege internă pe M

b) $*$ comut. pe M: $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)$ din $M \overset{(?)}{\Rightarrow} (x_1,y_1)*(x_2,y_2)=(x_2,y_2)*(x_1,y_1)$

$(x_1,y_1)*(x_2,y_2)=(3x_1x_2+7y_1y_2,\ 3x_1y_2+3x_2y_1)$

$(x_2,y_2)*(x_1,y_1)=(3x_2x_1+7y_2y_1,\ 3x_2y_1+3x_1y_2)$

$\Rightarrow$ egalit $\Rightarrow *$ comut pe M

c) $*$ as. pe M: $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\in M$

$\overset{(?)}{\Rightarrow} ((x_1,y_1)*(x_2,y_2))*(x_3,y_3) = (x_1,y_1)*((x_2,y_2)*(x_3,y_3))$

$M_s=((x_1,y_1)*(x_2,y_2))*(x_3,y_3)=$

$=(\underbrace{3x_1x_2+7y_1y_2}_{x_1},\ \underbrace{3x_1y_2+3x_2y_1}_{y_1})*(x_3,y_3)=$

$=(3(3x_1x_2+7y_1y_2)x_3+7(3x_1y_2+3x_2y_1)\cdot y_3,$

$3(3x_1x_2+7y_1y_2)y_3+3x_3(3x_1y_2+3x_2y_1))=$

$=(9x_1x_2x_3+21x_3y_1y_2+21x_1y_2y_3+21x_2y_1y_3,$

$9x_1x_2y_3+21y_1y_2y_3+9x_1x_3y_2+9x_2x_3y_1)$

$M_d=(x_1,y_1)*((x_2,y_2)*(x_3,y_3))=$

$=(x_1,y_1)*(3x_2x_3+7y_2y_3,\ 3x_2y_3+3x_3y_2)=$

$=(3x_1(3x_2x_3+7y_2y_3)+7y_1(3x_2y_3+3x_3y_2),$

$3x_1(3x_2y_3+3x_3y_2)+3(3x_2x_3+7y_2y_3)y_1)$

$=(9x_1x_2x_3+21x_1y_2y_3+21x_2y_1y_3+21x_3y_1y_2,$

$9x_1x_2y_3+9x_1x_3y_2+9x_2x_3y_1+21y_1y_2y_3)\Rightarrow$

$\Rightarrow M_s=M_d\Rightarrow *$ asociat pe M

d) $*$ are el neutru pe $M\Leftrightarrow \exists (e_1,e_2)\in M$ a.î.

$(x_1,y_1)*(e_1,e_2)=(e_1,e_2)*(x_1,y_1)=(x_1,y_1)$

din $(x_1,y_1)*(e_1,e_2)=(x_1,y_1)\Rightarrow$

$(3x_1e_1+7y_1e_2,\ 3x_1e_2+3e_1y_1)=(x_1,y_1)$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1e_1+7y_1e_2=x_1, & \forall (x_1,y_1) \\ 3x_1e_2+3e_1y_1=y_1, & \forall (x_1,y_1) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 3e_1=1 \text{ și } e_2=0 \\ 3e_2=0 \text{ și } 3e_1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} e_1=\frac{1}{3} \\ e_2=0 \end{matrix}$

$\Rightarrow (e_1,e_2)=(\frac{1}{3};0)\in M$. Deoarece $*$ comut pe $M\Rightarrow (x_1,y_1)*(e_1,e_2)=(e_1,e_2)*(x_1,y_1)$

$\Rightarrow (e_1,e_2)=(\frac{1}{3},0)$ este el neutru pe M

e) $*$ are toate el. simetrice pe $M(\Rightarrow$

$\forall (x_1,y_1)\in M,\ \exists (x_1',y_1')\in M$ cu prop

$(x_1,y_1)*(x_1',y_1')=(x_1',y_1')*(x_1,y_1)=(e_1,e_2)$

$\Leftrightarrow (x_1,y_1)*(x_1',y_1')=(e_1,e_2)\Rightarrow$

$(3x_1x_1'+7y_1y_1',\ 3x_1y_1'+3x_1'y_1)=(\frac{1}{3};0)$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1x_1'+7y_1y_1'=\frac{1}{3} \\ 3x_1y_1'+3x_1'y_1=0 \ /:3 \end{cases}$ e un sistem cu nec x_1', y_1'

$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1x_1'+7y_1y_1'=\frac{1}{3} & \cdot y_1 \\ x_1'y_1+x_1y_1'=0 & \cdot 3x_1 \end{cases}$

"$-$": $\quad -7y_1^2y_1'-3x_1^2y_1'=\frac{y_1}{3}$

$\Rightarrow y_1'(7y_1^2-3x_1^2)=\frac{y_1}{3}$

Pt $7y_1^2-3x_1^2\neq 0\Rightarrow \exists y_1'=\frac{y_1}{3(7y_1^2-3x_1^2)}$

Analog, $\begin{cases} 3x_1x_1'+7y_1y_1'=\frac{1}{3} & \cdot x_1 \\ x_1'y_1+x_1y_1'=0 & \cdot 7y_1 \end{cases}$

"$-$": $3x_1^2x_1'-7x_1'y_1^2=\frac{x_1}{3}\Rightarrow x_1'=\frac{-x_1}{3(7y_1^2-3x_1^2)}$

$\Rightarrow$ NU TOATE elem sunt simetrizabile ci doar cele cu $7y_1^2-3x_1^2\neq 0$