MONOIZI. GRUPURI

Arătați că următoarele mulțimi sunt monoizi, respectiv grupuri:

1) $\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix}1&\alpha&2\alpha^2+2\alpha\\0&1&4\alpha\\0&0&1\end{pmatrix} \middle| \alpha\in\mathbb{R}\right\}$

Se cere $(\mathcal{M},\cdot)$ grup abelian

2) $G=\{f_{a,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f_{a,b}(x)=ax+b,\ a\neq 0\}$

Se cere $(G,\circ)$ grup

3) $G=\left\{X(t)=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix} \middle| t\in[0;2\pi]\right\}$

Se știe că $X(t)X(u)=X(t+u)$, se cere $(G,\cdot_m)$ grup

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 2\alpha^2+2\alpha \\ 0 & 1 & 4\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Se cere: $(M, \cdot)$ grup abelian

E1) notăm matricele din M cu $A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 2\alpha^2+2\alpha \\ 0 & 1 & 4\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

E2) parte stabilă:

$\forall A(\alpha), A(\beta) \in M \overset{(?)}{\Longrightarrow} A(\alpha)\cdot A(\beta) \in M$

$$A(\alpha)A(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 2\alpha^2+2\alpha \\ 0 & 1 & 4\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \beta & 2\beta^2+2\beta \\ 0 & 1 & 4\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \beta+\alpha & 2\beta^2+2\beta+4\alpha\beta+2\alpha^2+2\alpha \\ 0 & 1 & 4\beta+4\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obs. că elementul $a_{12} = \alpha+\beta$, $a_{23} = 4(\alpha+\beta)$

Rămâne să arătăm că $a_{13} = 2(\alpha+\beta)^2 + 2(\alpha+\beta)$

verificăm: $2\beta^2+2\beta+4\alpha\beta+2\alpha^2+2\alpha =$

$= 2(\beta^2+2\alpha\beta+\alpha^2) + 2(\alpha+\beta) = 2(\alpha+\beta)^2 + 2(\alpha+\beta)$

$\Rightarrow A(\alpha)\cdot A(\beta) = A(\alpha+\beta) \Rightarrow A(\alpha)\cdot A(\beta) \in M$

E3) asociat.: • matric. asociat. caz general

E4) comut.: $A(\alpha)\cdot A(\beta) = A(\alpha+\beta)$, $A(\beta)A(\alpha) = A(\beta+\alpha)$

E5) el. neutru: $\underbrace{A(\alpha)\cdot A(e) = A(e)A(\alpha)}$ $= A(\alpha)$

$A(\alpha+e) = A(\alpha) \Rightarrow \alpha+e = \alpha \Rightarrow e = 0 \Rightarrow$ el. $A(0)$, comut.

$\Rightarrow$ el. inv.: $A(\alpha)\underbrace{A(\alpha') = A(\alpha')A(\alpha)} = A(e)$ ... inversul $A(-\alpha)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $G = \{ f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f_{a,b}(x) = ax + b, a \neq 0 \}$

Arătați că $(G, \circ)$ grup

$E_1)$ parte stabilă: $\forall f_{a,b}, f_{c,d} \in G \Rightarrow f_{a,b} \circ f_{c,d} \in G$

$f_{a,b} \circ f_{c,d}(x) = f_{a,b}(f_{c,d}(x)) = f_{a,b}(cx+d) =$

$= a(cx+d)+b = acx + ad+b = f_{ac,ad+b}(x)$

Deoarece $a, c \neq 0 \Rightarrow a \cdot c \neq 0 \Rightarrow f_{ac,ad+b} \in G$

și deducem $\boxed{f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{ac,ad+b}}$

$E_2)$ asociat: se scrie definiția și asociat cazul general

$E_3)$ el neutru: $\exists f_{e_1,e_2} \in G$ a.î. $f_{a,b} \circ f_{e_1,e_2} = f_{e_1,e_2} \circ f_{a,b} = f_{a,b}$

$f_{a,b} \circ f_{e_1,e_2} = f_{a,b} \Leftrightarrow f_{ae_1, ae_2+b} = f_{a,b}$

$\Rightarrow \begin{cases} ae_1 = a \xrightarrow{a \neq 0} e_1 = 1 \\ ae_2 + \cancel{b} = \cancel{b} \xrightarrow{a \neq 0} e_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow f_{e_1,e_2} = f_{1,0}$

Analog, $f_{e_1,e_2} \circ f_{a,b} \Rightarrow f_{e_1,e_2} = f_{1,0}$

$E_4)$ toate el. simetrizabile: $\forall f_{a,b} \in G, \exists f_{a',b'} \in G$ a.î.

$f_{a,b} \circ f_{a',b'} = f_{a',b'} \circ f_{a,b} = f_{e_1,e_2}$

$f_{a,b} \circ f_{a',b'} = f_{1,0} \Leftrightarrow \begin{cases} aa' = 1 \Rightarrow a' = \frac{1}{a} \\ ab' + b = 0 \Rightarrow b' = -\frac{b}{a} \end{cases}$

$f_{\ldots}$ $\frac{b}{\ldots}$ / analog cealaltă funcț...

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $G=\left\{X(t)=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix} \middle| t\in[0;2\pi)\right\}$

Se știe că $X(t)\cdot X(u)=X(t+u)$, $\forall t,u\in\mathbb{R}$

Arătați că G formează grup în raport cu înmulțirea

E_1) lege internă: $\forall X(t), X(u)\in G \overset{(?)}{\Longrightarrow} X(t)\cdot X(u)\in G$

Dar, $X(t)\cdot X(u)=X(t+u)$ deci tot forma matricilor din G și dacă $t+u\notin[0;2\pi) \Rightarrow t+u\in[2\pi;4\pi) \Rightarrow$ $t+u-2\pi\in[0;2\pi) \Rightarrow X(t)\cdot X(u)=X(t+u-2\pi)\in G$

E_3) asociativitatea: $\forall X(t), X(u), X(v)\in G \overset{(?)}{\Longrightarrow}$ $(X(t)X(u))X(v)=X(t)\cdot(X(u)X(v))$ adev deoarece înmulț matricilor asociat în caz general $\Rightarrow$ asoc. pe G

E_4) el neutru: $\exists X(e)\in G$ a-î. $X(t)X(e)=X(e)X(t)=X(t)$

Deoarece I_2 el neutru pe $M_2(\mathbb{R})$ și $I_2=X(0)\in G \Rightarrow$ $X(0)$ el neutru la înmulț pe G

E_5) toate elem. simetrizabile: $\forall X(t)\in G, \exists X(t')\in G$ a-î. $X(t)X(t')=X(t')X(t)=X(e)$

Din $X(t)X(t')=X(e) \Rightarrow X(t+t')=X(e) \Rightarrow t+t'=0$ $\Rightarrow t'=-t$. Dar, $t\in[0;2\pi) \Rightarrow t'\in[-2\pi;0) \Rightarrow$ $X(t')=X(-t)=X(2\pi-t)$ și e clar că $2\pi-t\in[0;2\pi)$ $\Rightarrow$ simetricul lui $X(t)$ este $X(2\pi-t)$, deoarece $*$ comutativ

E_2) comutativitate: $\forall X(u), X(v)\in G \overset{(?)}{\Longrightarrow} X(u)\cdot X(v)=X(v)\cdot X(u)$

Din ip $\left.\begin{array}{l} X(u)X(v)=X(u+v)\\ X(v)X(u)=X(v+u)\end{array}\right\} \Rightarrow$ comutativitate

E_6) Din $E_1) \rightarrow E_5) \Rightarrow (G,\cdot)$ grup abelian