ECUAȚII CU RĂDĂCINI ÎN PROGR. ARITM, GEOMETRICĂ. ECUAȚII RECIPROCE

1) $m \in \mathbb{R}$, $m = ?$ dacă rădăc. ec. sunt în progr aritm unde
$x^3 - 6x^2 + 11x + m = 0$

2) $m = ?$, $m \in \mathbb{R}$ dacă răd. ec.
$8x^3 - 2x^2 + 7x - 1 = 0$ sunt în progr geometrică

3) $m = ?$, $m \in \mathbb{R}$ dacă răd. ec.
$x^3 - 3x^2 - x + m = 0$ sunt în progr. aritmetică

Rezolvați:

4) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$

5) $x^4 + x^3 - 18x^2 + x + 1 = 0$

6) $2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = 0$

7) $x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0$

8) $x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 0$

9) $x^5 + 5x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 5x + 1 = 0$

10*) $4x^4 - mx^3 + 357x^2 - 340x + 64 = 0$ $m = ?$ dacă răd progr geometrică

Fie $4x^4+mx^3+357x^2-340x+64=0$, găsiți $m\in\mathbb{R}$ și rezolvați ec. dacă știm că are rădăc în progr geometrică

E1) x_1, x_2, x_3, x_4 progr geometr $\Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{\alpha}{b^3} \\ x_2=\frac{\alpha}{b} \\ x_3=\alpha b \\ x_4=\alpha b^3 \end{cases}$ cu rația $q=b^2$

E3) Din VIETE $\Rightarrow \begin{cases} S_1 = x_1+x_2+x_3+x_4 = -\frac{m}{4} \\ S_2 = x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\frac{357}{4} \\ S_3 = x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=\frac{340}{4}=85 \\ S_4 = x_1x_2x_3x_4=\frac{64}{4}=16 \end{cases}$

E4) din $S_4=16 \Rightarrow \frac{\alpha}{b^3}\cdot\frac{\alpha}{b}\cdot\alpha b\cdot\alpha b^3=16 \Rightarrow \alpha^4=16 \Rightarrow \alpha^4=2^4 \Rightarrow \alpha=\pm 2$

E5) Caz I: $\boxed{\alpha=2}$ și din $S_3=85 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\alpha}{b^3}\cdot\frac{\alpha}{b}\cdot\alpha b+\frac{\alpha}{b^3}\cdot\alpha b\alpha b^3+\frac{\alpha}{b^3}\cdot\frac{\alpha}{b}\alpha b^3+\frac{\alpha}{b}\alpha b\alpha b^3=85$

$\Rightarrow \alpha^3\left(\underbrace{\frac{1}{b^3}+b+\frac{1}{b}+b^3}\right)=85 \Rightarrow 8\left(\left(\frac{1}{b}+b\right)\left(\frac{1}{b^2}-1+b^2\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)\right)=85$

și avem $b^2+\frac{1}{b^2}=\left(b+\frac{1}{b}\right)^2-2b\cdot\frac{1}{b}=\left(b+\frac{1}{b}\right)^2-2$, notând $b+\frac{1}{b}=t$

$\Rightarrow 8\left(t(t^2-3)+t\right)=85 \Rightarrow 8(t^3-2t)=85 \Rightarrow \boxed{8t^3-16t-85=0}$

E6) Cu Horner

	t^3	t^2	t	t^0
	8	0	-16	-85
$\frac{5}{2}$	8	$8\cdot\frac{5}{2}+0=20$	$\frac{5}{2}\cdot 20-16=+34$	$\frac{5}{2}\cdot(+34)-85=0$

$\Rightarrow \left(t-\frac{5}{2}\right)(8t^2+20t+34)=0 \Rightarrow$ $t=\frac{5}{2}$ sau $8t^2+20t+34=0\,|:2 \Rightarrow 4t^2+10t+17=0$, $\Delta=100-16\cdot 17<0$

E7) $t=\frac{5}{2} \Rightarrow b+\frac{1}{b}=\frac{5}{2}\,|\cdot 2b$

$\Rightarrow 2b^2+2=5b \Rightarrow 2b^2-5b+2=0 \Rightarrow b_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4} < \begin{matrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}$

E8) Caz I1: $b=2 \Rightarrow q=b^2=4 \Rightarrow \boxed{x_1=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}}$; $\boxed{x_2=\frac{2}{2}=1}$, $x_3=4$, $x_4=16$

Caz I2: $b=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x_1=\frac{2}{\frac{1}{8}}=16}$ $\boxed{x_2=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4}$ $\boxed{x_3=1, x_4=4}$

E9) Caz II: $\alpha=-2$ procedăm analog și avem aceleași rădăcini.

E10) Pt m, din VIETE $\Rightarrow \frac{1}{4}+1+4+16=-\frac{m}{4} \Rightarrow \boxed{m=-85}$