

DISCUTIA NUMĂRULUI DE RĂDĂCINI REALE ALE UNEI ECUAȚII POLINOMIALE

Arătați că:

- 1) $x^3 + 2x^2 + 5x - 1 = 0$ nu are toate răd. reale
- 2) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 1 = 0$ nu are toate răd. reale
- 3) $x^3 + 3x^2 + 4x + 1 = 0$ nu are toate răd. reale
- 4) $x^4 - 5x^2 - 5 = 0$ nu are toate răd. reale
- 5) $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ are toate răd. reale
- 6) $x^4 - 4x + 7 = 0$ nu are toate răd. reale
- 7) $x^3 + 9x^2 + 20x + 5 = 0$ nu are toate răd. reale
- 8) $x^5 - x^4 + 3x^3 - x^2 - 2 = 0$ are o singură răd. reală
- 9) $2x^3 - ax^2 - ax + 2 = 0$, a cere a dată ec. are trei răd. reale
- 10) $a, b = ?$ dacă $x^4 - 4x^3 + 6x^2 + ax + b = 0$ are toate răd. reale
- 11) $a, b, c = ?$ dacă ec. are toate răd. reale: $2x^4 + 2(a-1)x^3 + (a^2+3)x^2 + bx + c = 0$
- 12)

Arătați că ecuația:

$$x^3 + 2x^2 + 5x - 1 = 0 \text{ nu are toate}$$

răd. reale

E₁) deoarece $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \Delta_1^2 - 2\Delta_2$, dacă vom arăta că $\Delta_1^2 - 2\Delta_2 < 0$, atunci ec. nu are toate răd. reale

E₂) din V(ETE), $\Delta_1 = -\frac{b}{a} = -2$

$$\Delta_2 = \frac{c}{a} = 5$$

$$\Rightarrow \Delta_1^2 - 2\Delta_2 = (-2)^2 - 2 \cdot 5 = 4 - 10 = -6 < 0$$

E₃) $\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 0 \Rightarrow$ ec. nu are toate rădăcinile reale

Arătați că ecuația

$$x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 1 = 0$$

nu are toate rădăcinile reale

Et1) met I: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \Delta_1^2 - 2\Delta_2$

din VIETE $\Rightarrow \Delta_1 = -\frac{b}{a} = -3$ $\Delta_3 = -\frac{d}{a} = 0$

$$\Delta_2 = \frac{c}{a} = 4 \qquad \Delta_4 = \frac{e}{a} = 1$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (-3)^2 - 2 \cdot 4 = 9 - 8 = 1 > 0 \Rightarrow$$

NU ȘTIIM cum sunt rădăcinile, deci nu putem folosi această metodă

Et2) met II: $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} = \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_4} \right)^2 - 2 \left(\frac{1}{x_1 x_2} + \dots + \frac{1}{x_3 x_4} \right)$

$$= \left(\frac{\Delta_3}{\Delta_4} \right)^2 - 2 \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta_4} = \left(\frac{0}{1} \right)^2 - 2 \cdot \frac{4}{1} = -8 < 0$$

\Rightarrow nu toate numerele $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4}$

sunt reale \Rightarrow nu toate rădăc. sunt reale

Grăbiți $a, b, c \in \mathbb{R}$ dacă ec.:

$$2x^4 + 2(a-1)x^3 + (a^2+3)x^2 + bx + c = 0$$

are toate răd. reale

E₁) din VIETE \Rightarrow

| | |
|---|--|
| $\Delta_1 = -\frac{b}{a} = -\frac{2(a-1)}{2} = 1-a$ | $\Delta_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{c}{2}$ |
| $\Delta_2 = \frac{c}{a} = \frac{a^2+3}{2}$ | $\Delta_4 = \frac{e}{a} = \frac{c}{2}$ |

E₂) dacă ec. are toate răd. reale $\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geq 0$

$$\Rightarrow (\Delta_1)^2 - 2\Delta_2 \geq 0 \Rightarrow (1-a)^2 - 2 \cdot \frac{a^2+3}{2} \geq 0 \Rightarrow 1-2a+a^2-a^2-3 \geq 0$$

$$\Rightarrow -2a \geq 2 \Rightarrow \boxed{a \leq -1}$$

E₃) dacă ec. are toate răd. reale $\Rightarrow \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} \geq 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_4}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_3} + \dots + \frac{1}{x_3x_4}\right) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\Delta_3}{\Delta_4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta_4} \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{-\frac{b}{2}}{\frac{c}{2}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\frac{a^2+3}{2}}{\frac{c}{2}} \geq 0 \Rightarrow \boxed{\frac{b^2}{c^2} - \frac{2(a^2+3)}{c} \geq 0}$$

E₄) dacă ec. are toate răd. reale $\Rightarrow (x_1-x_2)^2 + (x_1-x_3)^2 + \dots + (x_3-x_4)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2) + (x_1^2 - 2x_1x_4 + x_4^2) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + (x_2^2 - 2x_2x_4 + x_4^2) + (x_3^2 - 2x_3x_4 + x_4^2) \geq 0$$

$$\Rightarrow 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - 2(x_1x_2 + \dots + x_3x_4) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(\Delta_1^2 - 2\Delta_2) - 2\Delta_2 \geq 0 \Rightarrow 3\left((1-a)^2 - 2 \cdot \frac{a^2+3}{2}\right) - 2 \cdot \frac{a^2+3}{2} \geq 0$$

$$\Rightarrow 3(1-2a+a^2-a^2-3) - a^2-3 \geq 0 \Rightarrow -6-6a-a^2-3 \geq 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow a^2+6a+9 \leq 0 \Rightarrow (a+3)^2 \leq 0 \text{ și cum } (a+3)^2 \geq 0 \text{ și c} \ddot{a} \text{ e} \text{ pătrat perfect} \Rightarrow a+3=0 \Rightarrow \boxed{a=-3}$$

E₅) $a=-3 \Rightarrow (x_1-x_2)^2 + \dots + (x_3-x_4)^2 = (a+3)^2 = 0 \Rightarrow$ fiecare termen este 0 $\Rightarrow \boxed{x_1=x_2=x_3=x_4}$ din VIETE $\Rightarrow \Delta_1 = 1-a = 1+3 = 4$

$$\Rightarrow 4x_1 = 4 \Rightarrow \boxed{x_1=x_2=x_3=x_4=1}$$

E₆) din VIETE, $\Delta_3 = -\frac{b}{2}$, dar $\Delta_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 1+1+1+1 = 4$

$$\Rightarrow -\frac{b}{2} = 4 \Rightarrow \boxed{b=-8} \text{ și } \Delta_4 = \frac{c}{2}, \text{ dar } \Delta_4 = x_1x_2x_3x_4 = 1 \Rightarrow \frac{c}{2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c=2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -8 \\ c = 2 \end{cases}$$

Arătați că ecuația

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 1 = 0$$

nu are toate rădăcinile reale

E₁) deoarece $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \Delta_1^2 - 2\Delta_2$, dacă vom arăta că $\Delta_1^2 - 2\Delta_2 < 0$, atunci ecuația nu are toate rădăcinile reale

$$E_2) \text{ din VIE TE, } \Delta_1 = -\frac{b}{a} = -3 \quad \Delta_3 = -\frac{d}{a} = -1$$
$$\Delta_2 = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\Delta_1^2 - 2\Delta_2 = (-3)^2 - 2 \cdot 4 = 9 - 8 > 0$$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0 \Rightarrow$ nu știu ce se întâmplă

cu rădăcinile

$$E_3) \text{ încercăm să calculăm } \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = \frac{x_1 x_2 x_3}{\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right)^2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta_3} = \left(\frac{4}{-1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-3}{-1} = 16 - 6 = 10 > 0$$

\Rightarrow NU ȘTIU ce se întâmplă cu rădăcinile

$$E_4) \text{ calculăm } (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 =$$
$$= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + x_3^2 - 2x_3x_1 + x_1^2 =$$
$$= 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) =$$
$$= 2(\Delta_1^2 - 2\Delta_2) - 2\Delta_2 = 2(9 - 2 \cdot 4) - 2 \cdot 4 = 2 - 8 = -6 < 0$$

\Rightarrow sumă de pătrate negativă \Rightarrow nu toate parentesele sunt reale \Rightarrow nu toate răd. sunt reale.