PROBLEME NONSTANDARD CU POLINOAME

1) Fie $f = X^3 + X^2 + mX + 1$, arătați că $\forall m$ număr întreg par, f nu are răd. raționale

2) Fie $\alpha \in \mathbb{C}$ și polinomul
$f = X^3 + (1-\alpha)X^2 + (\alpha-2)iX + \alpha + (\alpha-2)i$
Găsiți α dacă f are 2 rădăcini distincte, complex conjugate

Fie $f = X^3 + X^2 + mX + 1$, arătați că $\forall m$ număr întreg par, f nu are răd. raționale

E1) Posibilele rădăcini raționale sunt $\dfrac{D_{\text{termen liber}}}{D_{\text{coef. dominant}}}$

E2) $\dfrac{D_1}{D_1} = \dfrac{\{\pm 1\}}{\{\pm 1\}} = \{\pm 1\}$

E3) $f(1) = 1 + 1 + m + 1 = 3 + m$

Dacă 1 ar fi rădăcină $\Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow$

$3 + m = 0 \Rightarrow m = -3$ fals pt că m par

$\Rightarrow$ 1 nu poate fi răd

E4) $f(-1) = \cancel{-1} \cancel{+1} - m + 1 = -m + 1$

Dacă -1 ar fi rădăcină $\Rightarrow f(-1) = 0$

$\Rightarrow -m + 1 = 0 \Rightarrow m = 1$ fals pt că m par

E5) $\Rightarrow f$ nu are răd. raționale

Găsiți $\alpha \in \mathbb{C}$ dacă $f = X^3 + (1-\alpha)X^2 + (\alpha-2)iX + \alpha + (\alpha-2)i$ are 2 rădăcini distincte, complexe conjugate

---

$E_1)$ x_1, x_2 rădăcini distincte, complexe conjugate

$\Rightarrow x_1 = a+bi,\ x_2 = a-bi$ cu $a, b \in \mathbb{R}$ și $b \neq 0$

$E_2)$ Din VIETE $\Rightarrow x_1 + x_2 = -\dfrac{1-\alpha}{1} = \alpha - 1$

$\Rightarrow (a+bi) + (a-bi) = \alpha - 1$

$\Rightarrow 2a = \alpha - 1 \Rightarrow \alpha = 2a+1$

Cum $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{\alpha \in \mathbb{R}}$

$E_3)$ Din VIETE $\Rightarrow x_1 x_2 = \dfrac{\alpha + (\alpha-2)i}{1} \Rightarrow$

$(a+bi)(a-bi) = \alpha + (\alpha-2)i \Rightarrow a^2 + b^2 = \alpha + (\alpha-2)i$

Dar, $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2+b^2 \in \mathbb{R} \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha - 2 = 0$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 2}$