CONDIȚIA CA F SĂ FIE PRIMITIVĂ PT f (DETERMINAREA CONSTANTELOR)

Arătați că F primit. pt f în cazurile:

1) $F(x)=\frac{\ln x}{x}$, $f(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

2) $F(x)=x\ln x-x$, $f(x)=\ln x$

3) $F(x)=e^x+x-\ln x$,
$f(x)=e^x+\frac{x-1}{x}$

Găsiți $a,b,c\in\mathbb{R}$ dacă F primit. pt f în cazurile:

4) $F(x)=x^3+x$, $f(x)=ax^2+b$

5) $f(x)=(x^2-1)\ln x$ și
$F(x)=x(ax^2-1)\ln x-x\left(\frac{x^2}{9}-b\right)$

6) $f(x)=2\cos x+3x^2+3$,
$F(x)=a\sin x+x^3+bx+4$

7) $f(x)=ax^2+x$, $F(x)=x^3+bx^2$

8) $f(x)=1+\ln(x+1)$, $F(x)=(x+a)\ln(x+b)$

9) $f(x)=\frac{1+2x-x^2}{1+2x+x^4}$, $F(x)=\frac{x^2+ax}{x^2+b}$

Fie $f, F : [1;\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ și

$f(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

Arătați că F este o primitivă pentru funcția f

$E_1)$ F este primitivă pentru f $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} F \text{ derivabilă, evident} \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$

$E_2)$ $$F'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot x'}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = f(x)$$

$E_3)$ Din $F'(x) = f(x) \Rightarrow F$ este primitivă pentru f

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$

Arătați că $F:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x\ln x - x$ este o primitivă pt $f(x)$

E1) Arătăm că $\begin{cases} F \text{ derivabilă} \\ F'(x)=f(x) \end{cases}$

E2) F derivabilă deoarece e operații cu funcții derivabile

E3) $F'(x)=(x\ln x - x)' = x'\ln x + x(\ln x)' - 1$

$= 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 1 = \ln x = f(x)$

$\Rightarrow F$ primitivă pt f

Fie $f, F : (0; \infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = e^x + \frac{x-1}{x}$ şi

$F(x) = e^x + x - \ln x$

Arătaţi că F este primitivă pentru f

$E_1)$ $\begin{cases} F \text{ derivabilă evident} \\ F'(x) = f(x) \quad (?) \end{cases}$

$E_2)$ $F'(x) = (e^x + x - \ln x)' = e^x + 1 - \frac{1}{x}$

$E_3)$ $F'(x) = e^x + \frac{x-1}{x} = f(x)$

$\Rightarrow F$ primit. pentru $f(x)$

Găsiți $a, b \in \mathbb{R}$ pt care F este primitivă pt f unde $f(x) = ax^2 + b$ și $F(x) = x^3 + x$

E1) F primit pt $f \Leftrightarrow \begin{cases} F \text{ derivabilă} \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$ sau

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

E2) În cazul nostru folosim $\begin{cases} F \text{ derivabilă} \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$

E3) $F(x) = x^3 + x$ e derivabilă

E4) $F'(x) = (x^3 + x)' = 3x^2 + 1$

E5) Dar, $F'(x) = f(x) \Rightarrow 3x^2 + 1 = ax^2 + b$

egalând coeficienții $\Rightarrow \begin{matrix} a = 3 \\ b = 1 \end{matrix}$

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-1)\ln x$

Găsiți a, b a.î. $F(x)=x(ax^2-1)\ln x - x\left(\frac{x^2}{9}-b\right)$

să fie primitivă pentru f

E1) $F'(x)=f(x)$ și egalăm coeficienții

E2) $$F'(x)=x'(ax^2-1)\ln x + x(ax^2-1)'\ln x + x(ax^2-1)(\ln x)' - 1\left(\frac{x^2}{9}-b\right) - x\left(\frac{x^2}{9}-b\right)'$$

$$F'(x)=(ax^2-1)\ln x + x\cdot 2ax\ln x + x(ax^2-1)\cdot\frac{1}{\cancel{x}} - \frac{x^2}{9}+b - x\cdot\frac{2x}{9}$$

E3) $$F'(x)=\ln x(ax^2-1+2ax^2)+ax^2-1+b-\frac{3x^2}{9}$$

$$F'(x)=(3ax^2-1)\ln x + ax^2-1+b-\frac{x^2}{3}$$

E4) Dar, $F'(x)=f(x) \Rightarrow F'(x)=(x^2-1)\ln x$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3ax^2\cancel{-1}=x^2\cancel{-1} \Rightarrow a=\frac{1}{3} \\ ax^2-1+b-\frac{x^2}{3}=0 \Rightarrow b=1 \end{cases}$$