PRIMITIVELE FUNCȚIILOR CU ACOLADĂ

Studiați dacă funcțiile următoare admit primitive și, în caz afirmativ, calculați primitivele cerute:

1) $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x<1 \\ 3x^2, & x\geq 1 \end{cases}$, se cere mț primitivelor

2) $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<1 \\ 2x, & x\geq 1 \end{cases}$, se cere o primit. a sa

3) $f(x)=\begin{cases} e^x-1, & x\leq 0 \\ \sin x, & x>0 \end{cases}$, se cere o primit. cu $F(-1)=2$

4) $f(x)=\begin{cases} e^x+1, & x\leq 0 \\ \cos x+2, & x>0 \end{cases}$, se cere mț primitivelor

5) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x\leq 1 \\ \frac{2+x^2}{3}, & x>1 \end{cases}$, se cere o primit. cu $F(2)=5$

6) $f(x)=\begin{cases} 2+\sin x, & x<0 \\ 2+3\sqrt{x}, & x\geq 0 \end{cases}$, se cere o primit. a lui f

7) $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x<1 \\ \sqrt{x}, & x\geq 1 \end{cases}$, se cere o primit pt f cu $F(-1)=1$

8) $f(x)=\begin{cases} 1+\sin x, & x<0 \\ 2-\cos x, & x\geq 0 \end{cases}$, se cere o primit pt f cu $F(\pi)=3\pi$

9) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{tg} x, & x<\frac{\pi}{4} \\ \sin x, & x\geq\frac{\pi}{4} \end{cases}$, se cere mț primitivelor

10) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^3}, & x<-1 \\ 2x+1, & x\geq -1 \end{cases}$, se cere mț. primitivelor

---

11) $f(x)=\begin{cases} 2x\ln x, & x>0 \\ m, & x=0 \end{cases}$, se cere m dacă f are primitive

12) $f(x)=\begin{cases} x, & x\leq 0 \\ \sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$

studiați dacă f admite primitive

Studiați dacă f admite primitive și în caz afirmativ, calculați mulțimea primitivelor, unde

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x<1 \\ 3x^2, & x\geq 1 \end{cases}$$

E_1) Folosim: „dacă f cont $\Rightarrow f$ admite primitive, dacă f are disc. I speță $\Rightarrow f$ nu admite primitive"

E_2) f cont pe $(-\infty;1)$ și pe $(1;\infty)$ ca f.ct elementară,

studiem dacă f cont în $x=1$

E_3) $l_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(2x+1)=3$; $l_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(3x^2)=3$

$f(1)=3\cdot 1^2=3 \Rightarrow f$ cont în $x=1 \Rightarrow f$ cont pe $\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ are primitive pe $\mathbb{R}$

E_4) $F(x)=\int f(x)\,dx=\begin{cases}\int(2x+1)\,dx, & x<1\\ \int(3x^2)\,dx, & x\geq 1\end{cases}=$

$=\begin{cases}2\cdot\frac{x^2}{2}+x+C_1, & x<1\\ 3\cdot\frac{x^3}{3}+C_2, & x\geq 1\end{cases}=\begin{cases}x^2+x+C_1, & x<1\\ x^3+C_2, & x\geq 1\end{cases}$

E_5) Dar, F cont pe $\mathbb{R} \Rightarrow F$ cont în $x=1 \Rightarrow$

găsesc legătura între constante

$l_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(x^2+x+C_1)=2+C_1$; $l_d(1)=1+C_2$; $F(1)=1+C_2$

F cont în $x=1 \Rightarrow 2+C_1=1+C_2 \Rightarrow C_2=1+C_1$, not $C_1=C \Rightarrow C_2=1+C$

$$\boxed{F(x)=\begin{cases}x^2+x+C, & x<1\\ x^3+1+C, & x\geq 1\end{cases}}$$

Studiați dacă f admite primitive

unde $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<1 \\ 2x, & x\geq 1\end{cases}$

și în caz afirmativ, calculați o primitivă a sa

E_1) Dacă f continuă $\Rightarrow$ f admite primitive,

dacă f are discontinuități de I speță $\Rightarrow$

f nu are primitive

E_2) f cont pe $(-\infty, 1)$ și pe $(1, \infty)$ ca și

fct elementară

E_3) Studiem dacă f continuă în $x=1$

$$\left.\begin{array}{l} l_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(x-1)=0 \\ l_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(2x)=2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad f(1)=2\cdot 1=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f nu e cont în $x=1$ și f are disc.

de prima speță $\Rightarrow$ f nu admite primitive

OBS.: $x=\alpha$ disc de I speță dacă $l_s(\alpha)$ și

$l_d(\alpha)$ sunt finite și f nu e cont în $x=\alpha$

Fie $f:[0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2x\cdot\ln x, & x>0 \\ m, & x=0\end{cases}$

Găsiți m pentru care f admite primitive

E_1) dacă f continuă ⇒ f admite primitive

dacă f are discont. de I speță ⇒ f nu admite primitive

E_2) studiem dacă f continuă (?)

f continuă pe $(0;\infty)$ pt că f f-ț elementară

f continuă în $x=0$ (?)

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=f(0)$ pentru că $\nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$ pt că $D_f=[0;\infty)$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2x\ln x \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2\cdot\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=$$

$$\underset{l'H}{\overset{\frac{-\infty}{\infty}}{=}} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\cancel{x}}\cdot\left(-\frac{x^{\cancel{2}}}{1}\right)=0$$

$f(0)=m$

E_3) pt ca f continuă în $x=0$ ⇒ $m=0$ ⇒ f are primit.

Dacă $m\neq 0$ ⇒ f are disc. I speță ⇒ f nu are primitive

Studiați dacă f admite primitive

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0\\ \sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$$

E_1) Caut o posibilă primit. pt f pe ramuri

$F_1(x)=\frac{x^2}{2}+\mathcal{C}_1,\ x\le 0$ și

$F_2(x)=x\sin\frac{1}{x}+\mathcal{C},\ x>0$ pt că

$F_2'(x)=1\cdot\sin\frac{1}{x}+\cancel{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}\right)$

E_2) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+\mathcal{C}_1, & x\le 0\\ x\sin\frac{1}{x}+\mathcal{C}_2, & x>0\end{cases}$ este singura posibilă primitivă pt f

E_3) F cont $\Rightarrow F_s(0)=F_d(0)=F(0)$

$\Leftrightarrow \mathcal{C}_1=\mathcal{C}_2=\mathcal{C}_1$ (pt că $F_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x\sin\frac{1}{x}+\mathcal{C}_2\right) \underline{\underline{0\cdot[-1,1]+\mathcal{C}_2}}\ \mathcal{C}_2$)

not $\mathcal{C}_1=\mathcal{C} \to F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+\mathcal{C}, & x\le 0\\ x\sin\frac{1}{x}+\mathcal{C}, & x>0\end{cases}$

E_4) $F_s'(0)=F_d'(0)$

$$\left.\begin{aligned}
F_s'(0)&=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\frac{x^2}{2}+\cancel{\mathcal{C}}-\cancel{\mathcal{C}}}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x}{2}=0\\
F_d'(0)&=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x\sin\frac{1}{x}+\cancel{\mathcal{C}}-\cancel{\mathcal{C}}}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sin\frac{1}{x}=\nexists
\end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow f$ nu admite primit.