MONOTONIA, MĂRGINIREA ȘI CONVERGENȚA ȘIRURILOR DE INTEGRALE

Studiați convergența următoarelor șiruri de integrale și găsiți, dacă se cere, relația de recurență:

1) $I_n=\int_0^1 \frac{x^n+2}{x+1}dx$, $n\geq 0$, se cere convergența

2) $I_n=\int \frac{x^n}{x^2+2x+2}dx$, $n\geq 0$, se cere convergența

3) $I_n=\int_0^1 x^n e^x dx$, $n\geq 0$ se cere convergența

4) $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x+2}dx$, $n\geq 1$, se cere $I_{n+1}+2I_n=\frac{1}{n+1}$ și convergența

5) $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+2x+2}dx$, $n\geq 1$, se cere $I_{n+2}+2I_{n+1}+2I_n=\frac{1}{n+1}$ și convergența

6) $I_n=\int_2^3 \frac{x^n}{x^2-1}dx$, $n\geq 0$, se cere $I_{n+2}-I_n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$ și studiați convergența

7)

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n+2}{x+1}\,dx$

Studiați convergența lui I_n, $n \geq 0$

$E_1)$ $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}+2}{x+1}\,dx - \int_0^1 \frac{x^n+2}{x+1}\,dx$

$E_2)$ $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}+\cancel{2}-x^n-\cancel{2}}{x+1}\,dx$

$$= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x+1}\,dx$$

$E_3)$ $x \in [0;1] \Rightarrow x^n \geq 0$, și $x-1 \leq 0$ și

$x+1 \geq 0$

$\Rightarrow \frac{x^n(x-1)}{x+1} \leq 0 \;\Big|\; \int_0^1 \ldots\,dx$

$E_4)$ $\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x+1}\,dx \leq 0 \Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0$
$\Rightarrow I_n \searrow$

$E_5)$ din $I_n \searrow \Rightarrow I_n \leq I_0 \Rightarrow I_n$ mărg superior

Dar, $x \in [0;1] \Rightarrow \frac{x^n+2}{x+1} \geq 0 \Rightarrow I_n \geq 0 \Rightarrow I_n \in [0; I_0]$
$\Rightarrow I_n$ mărg. Cum I_n monot $\Rightarrow I_n$ convergent

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{x^2+2x+2}$, studiați convergența

lui I_n, $n \geq 0$

E_1) monoton: $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} dx}{x^2+2x+2} - \int_0^1 \frac{x^n dx}{x^2+2x+2}$

$$= \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+2x+2}(x-1)\,dx$$

$$x \in [0;1] \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^n}{x^2+2x+2} \geq 0 \\ x-1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^n}{x^2+2x+2}(x-1) \leq 0$$

$$\Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0 \Rightarrow I_n \searrow$$

E_2) mărg: $I_n \searrow \Rightarrow I_n \leq I_0$

$$x \in [0;1] \Rightarrow \frac{x^n}{x^2+2x+2} \geq 0 \Rightarrow I_n \geq 0$$

$$I_n \in [0; I_0]$$

E_3) din I_n monot și mărg $\Rightarrow I_n$ convergent

Fie $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$, $I_0 = \int_0^1 e^x dx$

Arătați că I_n convergent, $n \geq 0$

E_1) monoton (?)

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} e^x dx - \int_0^1 x^n e^x dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^{n+1} e^x - x^n e^x\right) dx = \int_0^1 x^n e^x (x-1) dx$$

E_2) $x \in [0;1] \Rightarrow x^n e^x \geq 0$ și $x-1 \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^n e^x (x-1) \leq 0 \Rightarrow \int_0^1 x^n e^x (x-1) dx \leq 0$

$\Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0 \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n \Rightarrow I_n \searrow$ (1)

E_3) mărginirea (?)

din $I_n \searrow \Rightarrow I_n \leq I_0 \Rightarrow I_n$ mărg superior

de obicei, se compară cu 0

$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$, $x \in [0;1] \Rightarrow x^n \geq 0$, $e^x > 0$

$\Rightarrow x^n e^x \geq 0 \Rightarrow I_n \geq 0$

$\Rightarrow I_n \in [0; I_0] \Rightarrow$ mărginit (2)

E_4) din (1)+(2) $\Rightarrow I_n$ convergent

$f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^n}{x+2}$, $n \in \mathbb{N}^*$ și

$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$. Verificați dacă

$$I_{n+1} + 2I_n = \frac{1}{n+1} \text{ și}$$

studiați convergența lui I_n

E1) $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+2}\,dx$

$$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+2}\,dx$$

E2) $I_{n+1} + 2I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+2}\,dx + 2\int_0^1 \frac{x^n}{x+2}\,dx =$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{x+2} + \frac{2x^n}{x+2}\right)dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1}+2x^n}{x+2}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n}{\cancel{1}}\,dx$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

E3) <u>monot</u>: $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{x+2}\,dx =$

$= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x+2}\,dx$ și cum $x \in [0;1] \Rightarrow x - 1 \le 0 \Rightarrow I_{n+1} - I_n \le 0$

$\Rightarrow I_n \searrow$

E4) $I_n \searrow \Rightarrow I_n \le I_1$ și cum $x \in [0;1] \Rightarrow \frac{x^n}{x+2} \ge 0$

$\Rightarrow I_n \ge 0 \Rightarrow I_n \in [0; I_1] \Rightarrow I_n$ mărg

E5) Din $I_n \searrow$ și I_n mărg $\Rightarrow I_n$ convergent

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n\,dx}{x^2+2x+2},\ n \geq 1$

Se cere: $I_{n+2} + 2I_{n+1} + 2I_n = \frac{1}{n+1}$ și <u>studiați convergența lui I_n</u>

E1) $I_{n+2} + 2I_{n+1} + 2I_n =$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{x^2+2x+2}\,dx + 2\int_0^1 \frac{x^{n+1}\,dx}{x^2+2x+2} + 2\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{x^2+2x+2}$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n+2}+2x^{n+1}+2x^n}{x^2+2x+2}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n\cancel{(x^2+2x+2)}}{\cancel{x^2+2x+2}}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

E2) monot.: $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{x^2+2x+2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x^2+2x+2}\,dx$

E3) $x \in [0;1] \Rightarrow x-1 \leq 0,\ x^2+2x+2 > 0 \Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0 \Rightarrow I_n \searrow$ (1)

E4) din $I_n \searrow \Rightarrow I_n \leq I_1$

E5) $x \in [0;1] \Rightarrow \frac{x^n}{x^2+2x+2} \geq 0 \Rightarrow I_n \geq 0$

$\Rightarrow I_n \in [0; I_0] \Rightarrow I_n$ mărg (2)

E6) Din (1) + (2) $\Rightarrow I_n$ convergent

Fie $I_n = \int_2^3 \frac{x^n}{x^2-1}\,dx,\ n \geq 0$

Arătați că $I_{n+2} - I_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$ și studiați convergența lui I_n

E1) $I_{n+2} - I_n = \int_2^3 \frac{x^{n+2}}{x^2-1}\,dx - \int_2^3 \frac{x^n}{x^2-1}\,dx$

$$= \int_2^3 \frac{x^{n+2} - x^n}{x^2-1}\,dx = \int_2^3 \frac{x^n\cancel{(x^2-1)}}{\cancel{x^2-1}}\,dx$$

E2) $I_{n+2} - I_n = \int_2^3 \frac{x^n}{1}\,dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_2^3 =$

$$= \frac{3^{n+1}}{n+1} - \frac{2^{n+1}}{n+1} = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$$

E3) pt monot, $I_{n+1} - I_n = \int_2^3 \frac{x^{n+1}}{x^2-1}\,dx - \int_2^3 \frac{x^n}{x^2-1}\,dx =$

$= \int_2^3 \frac{x^n(x-1)}{x^2-1}\,dx$. Cum $x \in [2;3] \Rightarrow x-1>0,\ x^2-1>0$

$\Rightarrow \frac{x^n(x-1)}{x^2-1} \geq 0 \Rightarrow \int_2^3 \frac{x^n(x-1)}{x^2-1}\,dx \geq 0 \Rightarrow I_{n+1} - I_n \geq 0$

$\Rightarrow I_n \nearrow$

E4) Dacă I_n ar fi mărginit $\Rightarrow \lim_n I_n = l \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\lim_n (I_{n+2} - I_n) = l - l = 0 \Rightarrow \lim_n \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n+1} \overset{\infty(1-0)}{=} \infty \Rightarrow \infty = 0$, K.O. $\Rightarrow I_n$ nu e mărginit