

**CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

**ETAPA NAȚIONALĂ
7 mai 2016
Profil Tehnic**

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A IX-A

1. Considerăm mulțimile

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + (a-1) \cdot x - a = 0\} \text{ și } B = \{x \in \mathbb{R} \mid a \cdot x^2 - (2a+1) \cdot x + a + 1 = 0\}, a \in \mathbb{R}^*.$$

- a) Arătați că 1 aparține mulțimilor A și B.
- b) Determinați mulțimile A și B.
- c) Să se determine valoarea lui a știind că $A \cup B \subset \mathbb{Z}$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x$, precum și numerele $u = a^2 - 2a + 3$ și

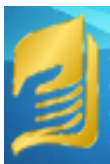
$$v = 1 + 2a - a^2, \text{ unde } a \in \mathbb{R}.$$

- a) Reprezentați graficul funcției f.
- b) Demonstrați că $v \leq 2 \leq u, (\forall) a \in \mathbb{R}$.
- c) Demonstrați că $\frac{f(u) + f(v)}{2} \leq f\left(\frac{u+v}{2}\right), (\forall) a \in \mathbb{R}$.

3. Un triunghi are un unghi obtuz iar lungimile laturilor sunt numere naturale în progresie aritmetică cu rația 2. Determinați perimetrul triunghiului.

4. Pentru a termina o lucrare, 5 muncitori au nevoie de 20 de zile. Ei lucrează la lucrare un număr de n zile, $5 \leq n \leq 11$, după care un muncitor pleacă la o altă lucrare. În câte zile vor termina lucrarea cei 4 muncitori rămași?

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
7 mai 2016
Profil Tehnic

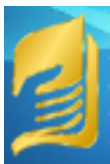


FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A X-A

- Se consideră mulțimea $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$
 - Demonstrați că $z_1 = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ și $z_2 = \cos t - i \cdot \sin t$ aparțin mulțimii M , oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$.
 - Demonstrați că pentru orice $z_1, z_2 \in M$ și produsul $z_1 \cdot z_2 \in M$.
 - Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției " **Dacă** $z_1 \cdot z_2 \in M$ **și** $z_1 \in M$, **atunci** $z_2 \in M$ "
- Se consideră dreptele $(d_m): y = m \cdot x + \sqrt{3} - m, m \in \mathbb{R}$
 - Pentru $m = 1$, determinați coordonatele simetricului punctului $O(0,0)$ față de dreapta (d_1) .
 - Demonstrați că dreptele (d_m) trec printr-un punct fix.
 - Dacă $m, n \in \mathbb{R}, m \neq n, OP \perp d_m, OQ \perp d_n$, să se demonstreze că $PQ \leq 4$.
- Se consideră mulțimea $M_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$
 - Determinați valoarea lui n știind că mulțimea M_n are 21 de submulțimi nevide cu cel mult două elemente.
 - Pentru $n = 6$, determinați numărul perechilor (A, B) formate din mulțimi având două elemente în comun și $A \cup B = M_6$.
- Într-o colonie formată din $n = 2016$ bacterii intră un virus. În primul minut el omoară două bacterii, apoi se divizează în doi noi viruși și concomitent fiecare dintre bacteriile rămase se divizează de asemenea în alte două bacterii. În minutul următor cei doi viruși omoară câte două bacterii, apoi cei doi viruși și toate bacteriile rămase se divizează din nou în două, și așa mai departe. După cât timp întreaga colonie de bacterii va fi omorâtă? (în ore și minute)

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

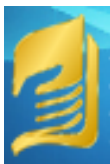
ETAPA NAȚIONALĂ
7 mai 2016
Profil Tehnic

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XI-A

- Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} + x + \cos x$
 - Să se studieze monotonia lui f .
 - Să se arate că f este bijectivă.
 - Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{f^{-1}(x)}$.
- Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x} - 3\ln \sqrt{x}$.
 - Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x_0 = 4$.
 - Să se demonstreze că $x\sqrt{x} \geq 3\ln \sqrt{x} + 1, \forall x > 0$.
 - Demonstrați că
$$\frac{1\sqrt{1} + 2\sqrt{2} + \dots + n\sqrt{n}}{n} \geq 1 + 3\ln \sqrt[2n]{n!}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$
- Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $\det(A) = 504$, să se determine $\det(2 \cdot A)$.
 - Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\det(A) \neq 0$, să se demonstreze că $\det(A^*) = \det(A)$;
 A^* - reprezintă matricea adjunctă asociată matricei A .
 - Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\det(A) \neq 0$ și $A^* = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, să se determine matricea A .
- O firmă de dezăpezire are la dispoziție echipele A, B, C pentru a interveni la o urgență. Analizând situația s-a constatat ca echipele A și B ar remedia situația în 12 ore, echipele B și C ar remedia situația în 15 ore, iar echipele A și C remedia situația în 20 de ore.
 - În câte ore ar remedia situația cele trei echipe lucrând împreună?
 - Dacă numai o echipă poate fi repartizată acestei lucrări, care este timpul minim în care va fi remediată situația?

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

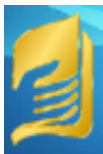
ETAPA NAȚIONALĂ
7 mai 2016
Profil Tehnic

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XII-A

- Se consideră polinomul $f = 2X^3 - 5X^2 + aX - 4$, $f \in \mathbb{C}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.
 - Arătați că $2X - 1 \mid f$ dacă și numai dacă $a = 10$.
 - Dacă $a = 10$ descompuneți în factori ireductibili polinomul f .
 - Determinați numărul real a astfel încât $\frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{x_1 x_2 x_3} = -\frac{127}{16}$.
- Se consideră inelul matricelor $(M_2(\mathbb{Z}_3), +, \cdot)$ și submulțimea $G = \left\{ A = \begin{pmatrix} \hat{a} + \hat{b} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{a} + \hat{c} \end{pmatrix} \mid \det A \neq \hat{0}, \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbb{Z}_3 \right\} \subset M_2(\mathbb{Z}_3)$, unde $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ este corpul claselor de resturi modulo 3.
 - Arătați că pentru oricare două matrice $X, Y \in G \Rightarrow X \cdot Y \in G$.
 - Determinați elementele mulțimii G .
 - Arătați că (G, \cdot) este grup. Este grupul (G, \cdot) comutativ? Justificați răspunsul.
- Se consideră funcția continuă $f: [-2, -1] \rightarrow [-4, -3]$, astfel încât $\int_{-2}^{-1} f^2(x) dx = \frac{3}{4}$. Să se demonstreze că:
 - $[f(x) + 4] \cdot [f(x) + 3] \leq 0, (\forall) x \in [-2, -1]$.
 - $\frac{-49}{4} \leq f^2(x) + 7 \cdot f(x) \leq -12, (\forall) x \in [-2, -1]$.
 - $28 \cdot \int_{-2}^{-1} f(x) dx \in [-52, -51]$.
- Trei tractoare A, B și C ar ara un teren în 7 ore, arând împreună. După ce au arat împreună timp de 5 ore, se defectează tractorul C iar cele două tractoare rămase ar termina de arat restul terenului în 4 ore. După 2 ore de la defectarea tractorului C, tractorul B este folosit la o altă lucrare, rămânând tractorul A care termină de arat terenul încă în 6 ore. În câte ore ar termina de arat terenul fiecare dintre tractoarele A, B, și C dacă ar ara singure?

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
7 mai 2016

Profil tehnic



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A IX-A

1. Considerăm mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + (a-1) \cdot x - a = 0\}$ și

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid a \cdot x^2 - (2a+1) \cdot x + a+1 = 0\}, a \in \mathbb{R}^*.$$

- Arătați că 1 aparține mulțimilor A și B.
- Determinați mulțimile A și B.
- Să se determine valoarea lui a știind că $A \cup B \subset \mathbb{Z}$.

Soluție.

- a) Verificare $1 \in A$ 1p
 $1 \in B$ 1p
 b) Se obține $A = \{1, -a\}$ 1p
 $B = \left\{1, \frac{a+1}{a}\right\}$ 1p
 c) Din $A \cup B \subset \mathbb{Z}$, rezultă că $a \in \mathbb{Z}$ și $\frac{a+1}{a} \in \mathbb{Z}$ 1p
 Finalizare $a \in \{-1, 1\}$ 2p

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x$, precum și numerele $u = a^2 - 2a + 3$ și

$$v = 1 + 2a - a^2, \text{ unde } a \in \mathbb{R}.$$

- Reprezentați graficul funcției f.
- Demonstrați că $v \leq 2 \leq u, (\forall) a \in \mathbb{R}$.
- Demonstrați că $\frac{f(u) + f(v)}{2} \leq f\left(\frac{u+v}{2}\right), (\forall) a \in \mathbb{R}$.

Soluție.

- a) Reprezentarea corectă a graficului 1p
 b) Se verifică $v \leq 2 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$, adevărat 1p
 $u \geq 2 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$, adevărat 1p
 c) Deoarece $-\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow f(x) \leq 2, (\forall) x \in \mathbb{R}$ 1p
 Deducem că $f(u) \leq 2, f(v) \leq 2$ 1p

Rezultă că $\frac{f(u)+f(v)}{2} \leq 2$ 1p

Dar $\frac{u+v}{2} = 2$, deci $\frac{f(u)+f(v)}{2} \leq f\left(\frac{u+v}{2}\right), (\forall) a \in \mathbb{R}$ 1p

3. Un triunghi are un unghi obtuz iar lungimile laturilor sunt numere naturale în progresie aritmetică cu rația 2. Determinați perimetrul triunghiului.

Soluție.

Fie $\triangle ABC$ $AB = a$, $AC = a+2$ și $BC = a+4$ 1p

Deducem că $m(\sphericalangle A) > 90^\circ$ 1p

Folosind teorema cosinusului $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\sphericalangle A)$ 1p

Obținem $\cos(\sphericalangle A) = \frac{a^2 - 4a - 12}{2a(a+2)}$ 1p

Din $m(\sphericalangle A) > 90^\circ \Rightarrow \cos(\sphericalangle A) < 0 \Rightarrow a^2 - 4a - 12 < 0$ 1p

Se obține $a \in (-2, 6) \cap \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 1p

Convin numai $a \in \{3, 4, 5\}$, deci perimetrul poate fi 15, 18 sau 21 1p

4. Pentru a termina o lucrare, 5 muncitori au nevoie de 20 de zile. Ei lucrează la lucrare un număr de n zile, $5 \leq n \leq 11$, după care un muncitor pleacă la o altă lucrare. În câte zile vor termina lucrarea cei 4 muncitori rămași?

Soluție.

Un muncitor execută într-o zi $\frac{1}{100}$ din lucrare 1p

În n zile, toți muncitorii vor executa $\frac{n}{20}$ din lucrare 1p

Rămâne de executat $\frac{20-n}{20}$ din lucrare 1p

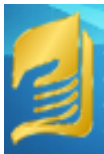
Fie x - numărul de zile necesare terminării lucrării de către cei 4 muncitori.

Ei vor executa $\frac{4x}{100}$ din lucrare 1p

Deci $\frac{4x}{100} = \frac{20-n}{20} \Rightarrow x = \frac{100-5n}{4} = 25 - \frac{5n}{4}$ 1p

Deducem că $\frac{5n}{4} \in \mathbb{N} \Rightarrow n:4$, de unde numai $n=8$ convine 1p

Finalizare $x = 15$ zile 1p



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
7 mai 2016



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A X-A

1. Se consideră mulțimea $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$

a) Demonstrați că $z_1 = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ și $z_2 = \cos t - i \cdot \sin t$ aparțin mulțimii M , oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că pentru orice $z_1, z_2 \in M$ și produsul $z_1 \cdot z_2 \in M$.

c) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției "Dacă $z_1 \cdot z_2 \in M$ și $z_1 \in M$, atunci $z_2 \in M$ "

Soluție.

a) Deoarece $|z_1| = 1$ și $|z_2| = 1$, rezultă că $z_1, z_2 \in M$ 2p

b) Dacă $z_1, z_2 \in M$, atunci $|z_1| \leq 1$ și $|z_2| \leq 1$.

Folosind proprietățile modulului $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \leq 1$, deci $z_1 \cdot z_2 \in M$ 3p

c) Propoziția este falsă. Un contraexemplu îl poate constitui numerele complexe z_1, z_2 cu $|z_1| = \frac{1}{9}$ și

$|z_2| = 3$. În acest caz $|z_1 \cdot z_2| = \frac{1}{3} \leq 1$, deci $z_1 \cdot z_2 \in M$ și $z_1 \in M$, dar $z_2 \notin M$ 2p

2. Se consideră dreptele $(d_m): y = m \cdot x + \sqrt{3} - m, m \in \mathbb{R}$

a) Pentru $m = 1$, determinați coordonatele simetricului punctului $O(0,0)$ față de dreapta (d_1) .

b) Demonstrați că dreptele (d_m) trec printr-un punct fix.

c) Dacă $m, n \in \mathbb{R}, m \neq n, OP \perp d_m, OQ \perp d_n$, să se demonstreze că $PQ \leq 4$.

Soluție.

a) $(d_1): y = x + \sqrt{3} - 1$. Fie $A(a, b)$ simetricul originii. Atunci $OA \perp d_1 \Leftrightarrow \frac{b}{a} = -1$ 1p

Mijlocul segmentului $[OA] \in (d_1) \Leftrightarrow \frac{b}{2} = \frac{a}{2} + \sqrt{3} - 1$ 1p

Se obține $a = 1 - \sqrt{3}, b = \sqrt{3} - 1$, deci punctul căutat este $A(1 - \sqrt{3}, \sqrt{3} - 1)$ 1p

b) $(d_m): m(x-1) - y + \sqrt{3} = 0, (\forall) m \in \mathbb{R}$ rezultă că $x-1=0$ și $-y + \sqrt{3} = 0$, deci $F(1, \sqrt{3})$ este punctul fix căutat 2p

c) Dacă F este punctul fix, atunci $F \in d_m, F \in d_n, m \neq n$

Atunci $OP \leq OF = 2, OQ \leq OF = 2$ 1p

Folosind inegalitatea triunghiulară $PQ \leq OP + OQ \leq 4$ 1p

3. Se consideră mulțimea $M_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

a) Determinați valoarea lui n știind că mulțimea M_n are 21 de submulțimi nevide cu cel mult două elemente.

b) Pentru $n = 6$, determinați numărul perechilor (A, B) formate din mulțimi având două elemente în comun și $A \cup B = M_6$.

Soluție.

a) Numărul submulțimilor cu 1 un element este egal cu n 1p

Numărul submulțimilor cu 2 elemente este egal cu $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ 1p

Din relația $n + \frac{n(n-1)}{2} = 21$, se obține $n = 6$ 1p

b) Elementele comune pot fi alese în $C_6^2 = 15$ moduri 2p

Fiecare dintre celelalte 4 elemente ale reuniunii poate fi distribuit în 2 moduri (sau în A , sau în B) 1p

Conform regulii produsului, vor exista $15 \cdot 2^4 = 240$ perechi (A, B) 1p

4. Într-o colonie formată din $n = 2016$ bacterii intră un virus. În primul minut el omoară două bacterii, apoi se divizează în doi noi viruși și concomitent fiecare dintre bacteriile rămase se divizează de asemenea în alte două bacterii. În minutul următor cei doi viruși omoară câte două bacterii, apoi cei doi viruși și toate bacteriile rămase se divizează din nou în două, și așa mai departe. După cât timp întreaga colonie de bacterii va fi omorâtă? (în ore și minute)

Soluție.

La momentul $t_0 = 0$ avem un virus și $n = 2016$ bacterii 1p

La momentul $t_1 = 1$ avem 2 viruși și $2(n-2)$ bacterii 1p

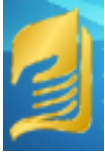
La momentul $t_2 = 2$ avem 2^2 viruși și $2^2(n-4)$ bacterii 1p

La momentul $t_3 = 3$ avem 2^3 viruși și $2^3(n-6)$ bacterii 1p

La momentul $t_k = k$ avem 2^k viruși și $2^k(n-2k)$ bacterii 1p

Deoarece $n = 2016$ impunem condiția ca $2016 - 2k = 0$, de unde $k = 1008$ minute 1p

Așadar întreaga colonie va fi omorâtă în 16 ore și 48 de minute 1p



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
7 mai 2016

Profil tehnic



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XI-A

1. Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} + x + \cos x$

- a) Să se studieze monotonia lui f .
b) Să se arate că f este bijectivă.

c) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{f^{-1}(x)}$.

Soluție.

a) $f'(x) = 2 \cdot e^{2x} + 1 - \sin x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ deci f este strict crescătoare 1p

b) f strict crescătoare, rezultă f funcție injectivă 1p

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{2x} + x + \cos x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, f$ continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ funcție surjectivă 2p

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{f^{-1}(x)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{2y} + y + \cos y)}{y} = \dots\dots\dots 1p$

$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{2y + \ln(1 + \frac{y}{e^{2y}} + \frac{\cos y}{e^{2y}})}{y} = \dots\dots\dots 1p$

$\lim_{y \rightarrow \infty} [2 + \frac{1}{y} \ln(1 + \frac{y}{e^{2y}} + \frac{\cos y}{e^{2y}})] = 2 \dots\dots\dots 1p$

2. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x} - 3\ln\sqrt{x}$.

a) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x_0 = 4$.

b) Să se demonstreze că $x\sqrt{x} \geq 3\ln\sqrt{x} + 1, \forall x > 0$.

c) Demonstrați că $\frac{1\sqrt{1} + 2\sqrt{2} + \dots + n\sqrt{n}}{n} \geq 1 + 3\ln \sqrt[n]{n!}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție.

a) Avem $f'(x) = \left(x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \ln x \right)' = \frac{3(x^{\frac{3}{2}} - 1)}{2x} \dots\dots\dots 1p$

iar ecuația tangentei este : $(t): 21x - 8y - 20 - 24\ln 2 = 0 \dots\dots\dots 2p$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ 1p

x	0	1	∞
$f'(x)$	- - - - -	0	+ + + + +
$f(x)$			

Deoarece $f(x) \geq 1$, $(\forall)x \in \mathbb{R}_+$ rezultă că $x\sqrt{x} \geq 3\ln\sqrt{x} + 1$, $\forall x > 0$ 1p

c) Folosind succesiv inegalitatea de la b) obținem:

- $1\sqrt{1} \geq 3\ln\sqrt{1} + 1$
- $2\sqrt{2} \geq 3\ln\sqrt{2} + 1$
- $3\sqrt{3} \geq 3\ln\sqrt{3} + 1$
- :
- $n\sqrt{n} \geq 3\ln\sqrt{n} + 1$

Prin adunare: $1\sqrt{1} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \dots + n\sqrt{n} \geq 3\ln\sqrt{n!} + n$

$$\frac{1\sqrt{1} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \dots + n\sqrt{n}}{n} \geq 3\ln\sqrt[n]{n!} + 1, (\forall)n \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 2p$$

3. a) Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $\det(A) = 504$, să se determine $\det(2 \cdot A)$.
 b) Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\det(A) \neq 0$, să se demonstreze că $\det(A^*) = \det(A)$;
 A^* - reprezintă matricea adjunctă asociată matricei A.
 c) Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\det(A) \neq 0$ și $A^* = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, să se determine matricea A.

Soluție.

a) Deoarece $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ va rezulta că $\det(2 \cdot A) = 2^2 \cdot \det(A) = 2016$ 2p

b) Deoarece $\det(A) \neq 0$ rezultă că $A^* = \det(A) \cdot A^{-1}$ 1p

Ținând cont că $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \Rightarrow \det(A^*) = [\det(A)]^2 \cdot \frac{1}{\det(A)} = \det(A)$ 1p

c) Folosind punctul anterior deducem că $\det(A^*) = \det(A) = 2$ 1p

Atunci $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 1p

Se obține că $A = (A^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ 1p

4. O firmă de dezăpezire are la dispoziție echipele A, B, C pentru a interveni la o urgență. Analizând situația s-a constatat ca echipele A și B ar remedia situația în 12 ore, echipele B și C ar remedia situația în 15 ore, iar echipele A și C remedia situația în 20 de ore.
- a) În câte ore ar remedia situația cele trei echipe lucrând împreună?
- b) Dacă numai o echipă poate fi repartizată acestei lucrări, care este timpul minim în care va fi remediată situația?

Soluție.

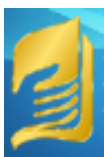
a) Notăm cu x, y, z numărul de ore necesare echipelor A, B, respectiv C pentru a termina lucrarea, lucrând singure 1p

Într-o oră echipa A execută $\frac{1}{x}$ din lucrare, echipa B execută $\frac{1}{y}$ din lucrare, iar echipa C execută $\frac{1}{z}$ din lucrare 1p

Putem obține $\begin{cases} 12\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \\ 15\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1 \\ 20\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) = 1 \end{cases}$ 1p

Din sistemul anterior se obține $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow 10\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1$, deci cele trei echipe lucrând împreună ar remedia urgența în 10 ore 2p

b) Din relațiile anterioare se obține că $x = 30, y = 20, z = 60$, deci timpul minim în care va fi remediată urgența de către o singură echipă este de 20 de ore, când este trimisă echipa B 2p



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
7 mai 2016

Profil tehnic



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XII-A

1. Se consideră polinomul $f = 2X^3 - 5X^2 + aX - 4$, $f \in \mathbb{C}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Arătați că $2X - 1 \mid f$ dacă și numai dacă $a = 10$.

b) Dacă $a = 10$ descompuneți în factori ireductibili polinomul f .

c) Determinați numărul real a astfel încât $\frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{x_1 x_2 x_3} = -\frac{127}{16}$.

Soluție

a) $2X - 1 \mid f \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{8} - 5 \cdot \frac{1}{4} + a \cdot \frac{1}{2} - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 10$ 1p

b) $f = 2X^3 - 5X^2 + 10X - 4 = (2X - 1)(X^2 - 2X + 4) = (2X - 1)(X - 1 - i\sqrt{3})(X - 1 + i\sqrt{3})$ 2p

c) Scriem relațiile lui Viete și se înlocuiesc valorile în expresia dată.

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \frac{5}{2}(S_1^2 - 2S_2) - \frac{a}{2}S_1 + 6 = \frac{173 - 30a}{8} \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$\frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{x_1 x_2 x_3} = \frac{173 - 30a}{8} \cdot \frac{1}{2}$$

Se obține ecuația în necunoscuta a : $\frac{173 - 30a}{16} = -\frac{127}{16} \Leftrightarrow a = 10$ 2p

2. Se consideră inelul matricelor $(M_2(\mathbb{Z}_3), +, \cdot)$ și submulțimea

$$G = \left\{ A = \begin{pmatrix} \hat{a} + \hat{b} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{a} + \hat{c} \end{pmatrix} \mid \det A \neq \hat{0} \quad \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbb{Z}_3 \right\} \subset M_2(\mathbb{Z}_3),$$

unde $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ este corpul claselor de resturi modulo 3.

a) Arătați că pentru oricare două matrice $X, Y \in G \Rightarrow X \cdot Y \in G$.

b) Determinați elementele mulțimii G .

c) Arătați că (G, \cdot) este grup. Este grupul (G, \cdot) comutativ? Justificați răspunsul.

Soluție

a) $X = \begin{pmatrix} \hat{a} + \hat{b} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{a} + \hat{c} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} \hat{x} + \hat{y} & \hat{y} \\ \hat{z} & \hat{x} + \hat{z} \end{pmatrix}$

$X, Y \in G \Rightarrow \det X \neq \hat{0}, \det Y \neq \hat{0}$.

$$X \cdot Y = \begin{pmatrix} \hat{a}\hat{x} + (\hat{a}\hat{y} + \hat{b}\hat{x} + \hat{b}\hat{y} + \hat{b}\hat{z}) & \hat{a}\hat{y} + \hat{b}\hat{x} + \hat{b}\hat{y} + \hat{b}\hat{z} \\ \hat{a}\hat{z} + \hat{c}\hat{x} + \hat{c}\hat{y} + \hat{c}\hat{z} & \hat{a}\hat{x} + (\hat{a}\hat{z} + \hat{c}\hat{x} + \hat{c}\hat{y} + \hat{c}\hat{z}) \end{pmatrix} \quad (1)$$

$\det(XY) = \det X \cdot \det Y \neq \hat{0}$ (2). Din (1) și (2) rezultă mulțimea G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{Z}_3)$ în raport cu operația de înmulțire indusă 3p

b) $\det A = \hat{a}^2 + \hat{a}\hat{b} + \hat{a}\hat{c} = a(\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}) \neq \hat{0} \Rightarrow \det A \in \{\hat{1}, \hat{2}\}$ 1p

Pentru $\det(A) = \hat{1}$ se obțin: $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$ 1p

Pentru $\det(A) = \hat{2}$ se obțin: $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}$ 1p

c) Notând elementele lui G se întocmește tabla operației și se deduce faptul că este bine structurată (fiecare element apare odată și numai odată pe fiecare linie și coloană).

Din tabla operației se deduce faptul că legea este *necomutativă* 1p

3. Se consideră funcția continuă $f: [-2, -1] \rightarrow [-4, -3]$, astfel încât $\int_{-2}^{-1} f^2(x) dx = \frac{3}{4}$. Să se demonstreze că:

demonstreze că:

a) $[f(x) + 4] \cdot [f(x) + 3] \leq 0, (\forall) x \in [-2, -1]$.

b) $-\frac{49}{4} \leq f^2(x) + 7 \cdot f(x) \leq -12, (\forall) x \in [-2, -1]$.

c) $28 \cdot \int_{-2}^{-1} f(x) dx \in [-52, -51]$.

Soluție:

a) Deoarece $f(x) \geq -4$ și $f(x) \leq -3, (\forall) x \in [-2, -1]$ va rezulta că

$[f(x) + 4] \cdot [f(x) + 3] \leq 0, (\forall) x \in [-2, -1]$ 2p

b) Din inegalitatea de mai sus, rezultă $f^2(x) + 7 \cdot f(x) \leq -12, (\forall) x \in [-2, -1]$ 1p

Din relația $\left(f(x) + \frac{7}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow -\frac{49}{4} \leq f^2(x) + 7 \cdot f(x), (\forall) x \in [-2, -1]$

Așadar $-\frac{49}{4} \leq f^2(x) + 7 \cdot f(x) \leq -12, (\forall) x \in [-2, -1]$ 2p

c) Integrând în dubla inegalitate de mai sus obținem

$-\frac{49}{4} \leq \int_{-2}^{-1} f^2(x) dx + 7 \cdot \int_{-2}^{-1} f(x) dx \leq -12$, de unde se obține $28 \cdot \int_{-2}^{-1} f(x) dx \in [-52, -51]$ 2p

4. Trei tractoare A, B și C ar ara un teren în 7 ore, arând împreună. După ce au arat împreună timp de 5 ore, se defectează tractorul C iar cele două tractoare rămase ar termina de arat restul terenului în 4 ore. După 2 ore de la defectarea tractorului C, tractorul B este folosit la o altă lucrare, rămânând tractorul A care termină de arat terenul încă în 6 ore. În câte ore ar termina de arat terenul fiecare dintre tractoarele A, B, și C dacă ar ara singure?

Soluție

Notăm cu x, y, z numărul de ore necesare tractoarelor A, B, respectiv C pentru a ara terenul, lucrând singure 1p

Într-o oră tractorul A ară $\frac{1}{x}$ din suprafața terenului, tractorul B ară $\frac{1}{y}$ din suprafața terenului iar

tractorul C ară $\frac{1}{z}$ din suprafața terenului 2p

$$\text{Putem obține } \left\{ \begin{array}{l} 7\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1 \\ 5\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + 4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \\ 5\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{6}{x} = 1 \end{array} \right. \dots\dots\dots 2p$$

Rezultă $x = 42$ ore, $y = 21$ ore și $z = 14$ ore 2p