MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a IX-a

BAREM

Problema 1.
Ioana și Maria, eleve în clasa a IX-a, studiază la școală 15 discipline și la sfârșitul primului semestru au obținut aceeași medie generală. Știind că fiecare din ele a avut medii de 8, 9 și 10 și numai de acestea iar numărul mediilor de 8 ale Ioanei este cu 6 mai mare decât numărul de medii de 8 ale Mariei, aflați care este media lor generală pe acel semestru.

<u>Soluție</u>:
Dacă a, b, c reprezintă numărul de medii respectiv de 8, 9 și 10 ale Ioanei, atunci $a, b, c \in \{1; 2; 3; ...; 13\}$ și în mod analog, dacă x, y, z reprezintă numărul de medii de 8, 9 și 10 ale Mariei, atunci $x, y, z \in \{1; 2; 3; ...; 13\}$ 1p
și $a+b+c=15$, respectiv $x+y+z=15$ 1p
$8a+9b+10c=8x+9y+10z$ 1p
$a=x+6$ 1p
$8a+9b+10(15-a-b)=8x+9y+10(15-x-y) \Rightarrow 2(a-x)=y-b$ 1p
$y=b+12$ 1p
$b=1$, $y=13$, $x=1$, $z=1$, $a=7$, $c=7$ și media generală este 9 .... 1p

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a IX-a

BAREM

Problema 2.

a) Fie $ABCD$ un paralelogram. Arătați că $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ pentru fiecare punct O din planul său.

b) Dacă $ABCD$ este un patrulater pentru care există un punct O în planul său, astfel încât $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$, arătați că $ABCD$ este paralelogram.

c) Considerăm un triunghi ABC și paralelogramele $AMNB$ și $BNPC$. Arătați că $CPMA$ este paralelogram.

Soluție:

a) Fie O un punct oarecare din planul paralelogramului $ABCD$, atunci:
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ care are loc deoarece $ABCD$ este paralelogram. 3p
sau orice altă rezolvare corect parcursă.

b) Deoarece, conform pașilor parcurși la punctul anterior, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, dacă relația $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ are loc pentru un punct din planul unui patrulater $ABCD$, atunci $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, ceea ce înseamnă că $AB \parallel DC$ și $[AB]\equiv[DC]$, deci $ABCD$ este paralelogram. 2p
sau orice altă rezolvare corect parcursă.

c) Conform cu a), vom avea:
în paralelogramul $AMNB$, $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{ON}$ iar în paralelogramul $BNPC$, $\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}$ 1p
și sumând cele două obținem $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}$ din care, conform cu b), $CPMA$ este paralelogram....... 1p
sau orice altă rezolvare corect parcursă.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ 20 mai 2017

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a IX-a

BAREM

Problema 3.

Considerăm toate funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care pentru orice $x\in\mathbb{R}$ verifică $f(x)+2f(1-x)=3g(x)$.

a) În cazul particular $f(x)=x^2-x$, determinați funcția g.

b) Arătați că, în condiția generală din enunț, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ se verifică $f(x)=2g(1-x)-g(x)$.

c) Demonstrați că atunci când g este funcție monoton crescătoare, f este funcție monoton descrescătoare.

<u>Soluție</u>:

a) $f(x)=x^2-x \Rightarrow 3g(x)=x^2-x+2(1-x)^2-2(1-x)$ 1p

$\Rightarrow g(x)=x^2-x$ 1p

b) Din $f(x)+2f(1-x)=3g(x)$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$, rezultă $f(1-x)+2f(x)=3g(1-x)$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$ 2p

și din sistemul celor două relații deducem $f(x)=2g(1-x)-g(x)$ 1p

c) Fie $x_1, x_2\in\mathbb{R}$, cu $x_1>x_2$ și cum g este crescătoare $\Rightarrow g(x_1)\geq g(x_2) \Rightarrow -g(x_1)\leq -g(x_2)$ (1)

Totodată din $x_1>x_2$ rezultă $1-x_1<1-x_2 \Rightarrow g(1-x_1)\leq g(1-x_2) \Rightarrow 2g(1-x_1)\leq 2g(1-x_2)$ (2)

Din (1) și (2) deducem implicația $x_1>x_2 \Rightarrow 2g(1-x_1)-g(x_1)\leq 2g(1-x_2)-g(x_2)$, dar conform cu b), $2g(1-x)-g(x)=f(x)$, deci $x_1>x_2 \Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$, ceea ce arată că atunci când g este funcție monoton crescătoare, f este funcție monoton descrescătoare. 2p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a IX-a

BAREM

Problema 4.

Notăm cu A mulțimea progresiilor aritmetice $(a;b;c)$, cu $a,b,c \in \{1;\ 2;\ 3;\ ...;2017\}$ și $a<b<c$.

a) Determinați câte progresii din mulțimea A au primul termen $a=1007$.
b) Aflați câte progresii din mulțimea A au rația egală cu 100.
c) Determinați numărul elementelor mulțimii A.

Soluție:

a) Progresiile sunt $1007;1007+r;1007+2r$ și având $1007+2r \le 2017 \Rightarrow r \le 505$, deci $r \in \{1;2;3;...;505\}$ și înseamnă că avem 505 progresii care au primul termen $a=1007$ 3p
b) Progresiile sunt $a;a+100;a+200$ cu $a \le 1817$, $\Rightarrow$ 1817 progresii 2p
c) Progresiile cu primul termen egal cu k sunt $k;k+r;k+2r$, cu $r \le \frac{2017-k}{2}$

Pentru cazul în care k este par, $k=2n$ și avem $r \le 1008-n$, deci $n \in \{1;\ 2;\ ...;1007\}$

iar pentru k impar, $k=2n+1$ și avem $r \le 1008-n$, deci $n \in \{0;\ 1;\ 2;\ ...;1007\}$.

În total vom avea $1008+2(1+2+3+...+1007)=1008+1007\cdot 1008=1008^2$ progresii 2p

Observație:

În mod analog, ordonând după rație obținem 2015 progresii cu rația 1, 2013 cu rația 2, 2011 cu rația 3, etc. și în total vom avea $1+3+5+...+2015=1+3+5+...+(2\cdot 1008-1)=1008^2$ progresii.

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

BAREM

Problema 1.

Fie mulțimea de numere complexe $M=\left\{z\in\mathbb{C}^*/\left|z+\frac{1}{z}\right|\le 2\right\}$.

a) Arătați că $1+2i\in M$ și $2+i\notin M$.

b) Dacă $z\in\mathbb{C}$ și $|z|=1$, arătați că $z\in M$.

c) Dacă $z\in\mathbb{C}$ și $z^2\in M$, arătați că $z\in M$.

Soluție:

a) $\left|1+2i+\frac{1}{1+2i}\right|=...=2\le 2$ 2p

$\left|2+i+\frac{1}{2+i}\right|=...=\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{5}}>2$ 1p

b) Dacă $|z|=1$, atunci $\left|z+\frac{1}{z}\right|\le|z|+\frac{1}{|z|}\le 2 \Rightarrow z\in M$ 2p

sau $z=a+ib$ cu $a^2+b^2=1 \Rightarrow \left|a+ib+\frac{1}{a+ib}\right|=|a+ib+a-ib|=2|a|\le 2 \Rightarrow z\in M$

c) În cazul $z^2\in M$, avem $\left|z+\frac{1}{z}\right|^2=\left|\left(z+\frac{1}{z}\right)^2\right|=\left|z^2+\frac{1}{z^2}+2\right|\le\left|z^2+\frac{1}{z^2}\right|+2\le 4 \Rightarrow z\in M$ 2p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

BAREM

Problema 2.

Considerăm ecuația $\left(\sin x+\sqrt{3}\cdot\cos x\right)^2-5=\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$.

a) Demonstrați că $x=\frac{19\pi}{6}$ este soluție a acestei ecuații.

b) Determinați mulțimea tuturor soluțiilor acestei ecuații.

c) Dacă $a\in\mathbb{R}$ este cea mai mică soluție pozitivă a acestei ecuații, calculați $\sin\left(\frac{a}{2}\right)$.

Soluție:

$\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=...=\frac{\sqrt{3}\cos x+\sin x}{2}$ 1p

și ecuația devine $4\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-5=\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$

a) $x=\frac{19\pi}{6}=3\pi+\frac{\pi}{6}\ \Rightarrow\ 4\cos^2(-3\pi)-5=\cos(-3\pi)\ \Leftrightarrow\ 4-5=-1$ 2p

b) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=t$, $t\in[-1;1]$, $4t^2-t-5=0$,

$t_1=\frac{5}{4}\notin[-1;1]$,..1p

$t_2=-1\ \Rightarrow\ \cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=-1\ \Rightarrow\ \frac{\pi}{6}-x=(2k+1)\pi\ \Rightarrow\ x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ 1p

c) $a=\frac{7\pi}{6}$ 1p

$\sin\frac{a}{2}=\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=...=\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

BAREM

Problema 3.

a) Arătați că $\{2-\sqrt{5}\}=3-\sqrt{5}$, unde $\{a\}$ este *partea fracționară* a numărului real a.

b) Calculați b^2-b, pentru $b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ și arătați că în acest caz b și b^2 au aceeași parte fracționară.

c) Dacă x este un număr irațional și q un număr rațional nenul, demonstrați că suma și produsul lor sunt numere iraționale.

d) Dacă x este un număr real încât $\{x\}=\{x^2\}=\{x^3\}$, demonstrați că x este număr întreg.

<u>**Soluție**</u>:

a) $\{a\}=a-[a]=2-\sqrt{5}-(-1)=3-\sqrt{5}$ 2p

b) $b^2-b=1\in\mathbb{Z} \Rightarrow \{b^2\}=\{b\}$ 1p

c) Dacă $x+q=p\in\mathbb{Q} \Rightarrow x=p-q\in\mathbb{Q}$ conntradicție cu $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 1p

Dacă $x\cdot q=r\in\mathbb{Q} \Rightarrow x=\frac{r}{q}\in\mathbb{Q}$ conntradicție cu $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 1p

d) Din $\{x\}=\{x^2\} \Rightarrow x^2-x=n\in\mathbb{Z}$ iar din $\{x^2\}=\{x^3\} \Rightarrow x^3-x^2=x(x^2-x)=x\cdot n\in\mathbb{Z}$ și atunci

dacă $n=0$ atunci $x=0\in\mathbb{Z}$ sau $x=1\in\mathbb{Z}$

dacă $n\neq 0$ atunci $x\in\mathbb{Q}$ 1p

dar $x\in\mathbb{Q}$, $n\in\mathbb{Z}$ și $x^2-x-n=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{4n+1}}{2}\in\mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{4n+1}\in\mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{4n+1}=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$,

din care se obține $x_{1,2}\in\mathbb{Z}$ 1p

sau prin reducere la absurd:

Dacă $x=\frac{a}{b}$, cu $a\in\mathbb{Z}^*$ și $b\in\mathbb{N}^*$, $b\geq 2$ este număr rațional exprimat ca fracție ireductibilă, atunci $x^2=\frac{a^2}{b^2}$

și obținem $x^2-x=n\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2}-\frac{a}{b}=n \Leftrightarrow \frac{a^2-ab}{b^2}=n \Leftrightarrow a^2=b(nb+a) \Leftrightarrow b/a^2$ contradicție.

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

BAREM

Problema 4.

La un turneu de șah au participat n fete și $2n$ băieți. Fiecare doi participanți au jucat între ei doar o singură partidă și nici o partidă nu s-a încheiat remiză. La încheierea concursului, raportul dintre numărul de victorii obținute de fete și numărul de victorii obținute de băieți a fost $\frac{7}{5}$. Dacă notăm cu x numărul total de victorii obținute de fete în partidele cu băieți, se cere:

a) Să se demonstreze că $x \le 2n^2$.
b) Să se demonstreze că $8x = 17n^2 - 3n$.
c) Să se determine numărul de fete participante la acel turneu de șah.

<u>Soluție</u>:

a) Numărul de meciuri jucate între un băiat și o fată este $n \cdot 2n = 2n^2 \Rightarrow x \le 2n^2$ 2p

b) Fetele au jucat între ele $\frac{n(n-1)}{2}$ partide iar băieții au jucat între ei $n(2n-1)$ partide 1p

Numărul de victorii ale fetelor este $\frac{n(n-1)}{2} + x$ iar ale băieților este $n(2n-1) + 2n^2 - x$ 1p

Rezultă $5 \cdot \left[\frac{n(n-1)}{2} + x\right] = 7 \cdot \left[n(2n-1) + 2n^2 - x\right]$ 1p

din care se obține $8x = 17n^2 - 3n$ 1p

c) Din $x \in \mathbb{N}^*$, $x \le 2n^2$ și $8x = 17n^2 - 3n$ rezultă $n(n-3) \le 0$, deci $n \in \{1; 2; 3\}$. Verifică $n = 3$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

BAREM

Problema 1.

Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 6 & -2\end{pmatrix}$ și mulțimea G a matricelor $X(a)$ de forma $X(a)=I_2+a\cdot A$, cu $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

a) Demonstrați că pentru orice $X(a),\ X(b)\in G$ are loc $X(a)\cdot X(b)=X(ab+a+b)$ și $X(ab+a+b)\in G$.

b) Arătați că orice matrice $X(a)\in G$ este inversabilă și $X^{-1}(a)=X\left(\frac{-a}{a+1}\right)$.

c) Calculați $X^{-1}(5)\cdot X(41)\cdot X^{-1}(6)$.

<u>Soluție</u>:

a) $X(a)\cdot X(b)=(I_2+a\cdot A)(I_2+b\cdot A)=I_2+b\cdot A+a\cdot A+ab\cdot A^2$ 1p

$A^2=A$ 1p

$X(a)\cdot X(b)=I_2+(a+b+ab)\cdot I_2=X(a+b+ab)$ și

$a+b+ab=(a+1)(b+1)-1\neq -1 \Rightarrow X(ab+a+b)\in G$ 1p

b) $I_2=X(0)$ și $X(a)\cdot X(a')=X(0)$ 1p

$\Rightarrow aa'+a+a'=0 \Rightarrow a'=\frac{-a}{a+1}\neq -1 \Rightarrow X^{-1}(a)=X\left(\frac{-a}{a+1}\right)$ 1p

c) Folosind $X(a)\cdot X(b)=X((a+1)(b+1)-1) \Rightarrow X(a)\cdot X(b)\cdot X(c)=X((a+1)(b+1)(c+1)-1)$ 1p

$\Rightarrow X^{-1}(5)\cdot X(41)\cdot X^{-1}(6)=X\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot X(41)\cdot X\left(-\frac{6}{7}\right)=...=X(0)=I_2$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

BAREM

Problema 2.

Fie $A \in M_3(\mathbb{R})$ o matrice inversabilă și $A^* = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 7 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ adjuncta matricei A.

a) Determinați inversa matricei A^*.
b) Demonstrați că $A \cdot A^* = A^* \cdot A = a \cdot I_3$, unde $a = \det A$ este determinantul matricei A.
c) Determinați matricea A.

__Soluție__:

a) $(A^*)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 3p

b) $A^{-1} = \frac{1}{a} \cdot A^* \Rightarrow A^* \cdot A = A \cdot A^* = a \cdot I_3$ 2p

c) $A = a \cdot (A^*)^{-1} = \frac{a}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 1p

$A^* = \begin{pmatrix} \frac{-5a^2}{4} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \Rightarrow -\frac{5a^2}{4} = -5 \Rightarrow a = \pm 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ sau $A = -\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

BAREM

Problema 3.

a) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Determinați $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}\right)$ este finită și nenulă.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}-3\sqrt{x}\right)$.

c) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ cu $a_1+a_2+...+a_n=0$. Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a_1\sqrt{x+1}+a_2\sqrt{x+2}+...+a_n\sqrt{x+n}\right)$.

__Soluție__:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(a-b)\cdot x^{\alpha}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}$ 2p

și limita este finită și nenulă când $\alpha=\dfrac{1}{2}$ 1p

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}-3\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\right)$ 1p

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)+\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)+\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)=3$ 2p

c) Deoarece $a_1+a_2+...+a_n=0$, putem scrie

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(a_1\sqrt{x+1}+a_2\sqrt{x+2}+...+a_n\sqrt{x+n}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(a_1\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)+a_2\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)+...+a_n\left(\sqrt{x+n}-\sqrt{x}\right)\right)$

și se obține $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a_1\sqrt{x+1}+a_2\sqrt{x+2}+...+a_n\sqrt{x+n}\right)=0$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

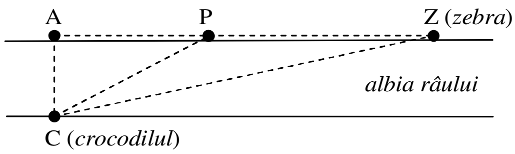
FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

BAREM

Problema 4.
Un crocodil și o zebră se află de o parte și de cealaltă a unui râu iar în figură se arată cum crocodilul, aflat în poziția C, poate ajunge la zebra aflată în poziția Z pe un traseu $[CP]+[PZ]$, unde $P\in[AZ]$ iar triunghiul ACZ este dreptunghic în A. Se știe că $AZ=22{,}5\ m$ iar $T(x)=\dfrac{4x^2+180}{5x+10}$ exprimă în minute timpul necesar crocodilului pentru a parcurge traseul $[CP]+[PZ]$, unde $x=AP$.



Se cere:
a) Calculați în cât timp ajunge crocodilul la zebră doar înot, adică parcurgând segmentul $[CZ]$.
b) Calculați în cât timp ajunge crocodilul la zebră dacă traversează râul pe drumul cel mai scurt, $[CA]$.
c) Determinați timpul minim în care crocodilul poate ajunge la zebră.
d) Arătați că, pentru orice durată $t\in(8;18]$, crocodilul poate alege două trasee pentru a ajunge la zebră în t minute.

<u>Soluție</u>:

a) $T(22{,}5)=18$ minute 1p

b) $T(0)=18$ minute 1p

c) $T'(x)=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{x^2+4x-45}{(x+2)^2}$ 1p

și $x^2+4x-45=0$ are $x_1=5\geq 0$ și $x_1=-9<0$ 1p

$\Rightarrow$ funcția $T:[0;\ 22{,}5]\to\mathbb{R}$, $T(x)=\dfrac{4x^2+180}{5x+10}$ este

strict descrescătoare pe $[0;5]$ și strict crescătoare pe $[5;22{,}5]$ 1p

deci $T(5)=8$ minute este timpul minim în care crocodilul poate ajunge la zebră. 1p

d) Funcția $T:[0;\ 22{,}5]\to\mathbb{R}$, $T(x)=\dfrac{4x^2+180}{5x+10}$, fiind continuă, descrescătoare pe $[0;5]$ și strict crescătoare pe $[5;22{,}5]$, cu $F(5)=8$ și $F(0)=F(22{,}5)=18\ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ pentru orice $t\in(8;18]$ vor exista $x_1\in[0;\ 5)$ și $x_2\in(5;\ 22{,}5]$ cu $T(x_1)=T(x_2)=t$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

BAREM

Problema 1.

Fie polinomul $f = X^4 + 4X^3 + 9X^2 + aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ și $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ rădăcinile lui.

a) Arătați că f are cel mult două rădăcini reale.

b) Determinați coeficienții $a, b \in \mathbb{R}$ în cazul în care f are $x_1 = x_2 = -1$.

c) Pentru $a = 10$ și $b = 4$, notând cu α și β rădăcinile complexe nereale ale polinomului f, să se calculeze $S = (\alpha+2)^{2017} + (\beta+2)^{2017}$.

<u>Soluție</u>:

a) Din relațiile Viète, $S_1 = -4$ și $S_2 = 9 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = S_1^2 - 2S_2 = -2$ 1p

și având f cu coeficienți reali și $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 < 0 \Rightarrow$ cel puțin două rădăcini sunt complexe nereale și astfel cel mult două sunt reale. 1p

b) $f(-1) = f'(-1) = 0$ 1p

$\Rightarrow a = 10$, $b = 4$ 1p

c) $f = X^4 + 4X^3 + 9X^2 + 10X + 4 = (x+1)^2(x^2 + 2x + 4)$ 1p

$\Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha + 4 = 0$, $\beta^2 + 2\beta + 4 = 0$ și $\alpha^3 = 8$, $\beta^3 = 8$ 1p

$\Rightarrow S = (\alpha+2)^{2017} + (\beta+2)^{2017} = \left(-\frac{\alpha^2}{2}\right)^{2017} + \left(-\frac{\beta^2}{2}\right)^{2017} = -\frac{1}{2^{2017}}\left(\alpha^{4034} + \beta^{4034}\right) = \ldots = 2^{2017}$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

BAREM

Problema 2.
Irina, elevă în clasa a XII-a, găsește din întâmplare o ciornă în care colegul ei, Mircea, încerca să rezolve o problemă. Din ciornă ea constată că este vorba de o structură de corp comutativ $(\mathbb{R};\ *;\circ)$, izomorf cu $(\mathbb{R};\ +;\ \cdot)$ printr-o funcție de gradul I și în care $e=4$ este elementul neutru al operației ”$*$” iar $\overline{e}=5$ este elementul neutru al operației ”$\circ$”. Folosind aceste informații și știind că Irina a rezolvat corect întreaga problemă, răspundeți la următoarele cerințe:

a) Arătați că funcția care realizează izomorfismul este $f:(\mathbb{R};\ *;\circ)\to(\mathbb{R};\ +;\ \cdot)$, $f(x)=x-4$.

b) Demonstrați că $x*y=x+y-4$ și $x\circ y=xy-4x-4y+20$.

c) Determinați opusul și inversul lui 2017 în structura $(\mathbb{R};\ *;\circ)$.

<u>Soluție</u>:

a) Având în $(\mathbb{R};\ *;\circ)$ $e=4$ și $\overline{e}=5$, dacă $f:(\mathbb{R};\ *;\circ)\to(\mathbb{R};\ +;\ \cdot)$ este izomorfism, $f(4)=0$ și $f(5)=1$ 1p
$f(x)=ax+b$, $f(4)=0$ și $f(5)=1 \Rightarrow a=1,\ b=-4$ 1p

b) $f(x*y)=f(x)+f(y) \Rightarrow x*y-4=(x-4)+(y-4) \Rightarrow x*y=x+y-4$ 2p
$f(x\circ y)=f(x)\cdot f(y) \Rightarrow x\circ y-4=(x-4)\cdot(y-4) \Rightarrow x\circ y=xy-4x-4y+20$ 1p

c) Dacă x' este simetricul lui x în $(\mathbb{R};\ *)$, $x*x'=4 \Rightarrow x'=8-x \Rightarrow 2017'=-2009$ 1p
respectiv x'' este simetricul lui x în $(\mathbb{R};\ \circ)$, $x*x''=5 \Rightarrow x''=\dfrac{4x-15}{x-4} \Rightarrow 2017''=\dfrac{8053}{2013}$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

BAREM

Problema 3.
Prețul de utilizare a unui aparat este suma dintre prețul de achiziție și costurile de întreținere. Considerăm că acest preț este dat de funcția $C(x)=10.000+\frac{800}{3}\int_0^x \sqrt[3]{2t-1}\,dt$, unde $x \geq 0$ reprezintă numărul de ani trecuți de la momentul $T=0$ al achiziției până la momentul $T=x$ iar $C(x)$ este prețul de utilizare la x ani de la achiziție, exprimat în lei. Se cere:

a) Determinați care este prețul de achiziție al aparatului?
b) Determinați care a fost prețul de întreținere al aparatului la finalul primului an de utilizare.
c) Arătați că prețul de întreținere al aparatului la finalul celui de al zecelea an de utilizare nu ajunge la 5030 lei.

<u>Soluție</u>:

a) $C(0)=10.000$ lei. 1p

$\int_0^x \sqrt[3]{2t-1}\,dt=\frac{3}{8}(2t-1)\sqrt[3]{2t-1}\Big|_0^x=\frac{3}{8}\left[(2x-1)\sqrt[3]{2x-1}-1\right]$ deci $C(x)=9.900+100(2x-1)\sqrt[3]{2x-1}$

b) $C(1)=10.000$ 2p
deci, pentru primul an de utilizare, prețul de întreținere este de 0 lei 1p

c) $C(10)-C(0)=100\cdot\left(19\sqrt[3]{19}-1\right)$ 2p
$C(10)-C(0)<100\cdot(19\cdot 2,7-1)=5.030$ lei 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ 20 mai 2017

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

BAREM

Problema 4.

Considerăm funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Se cere:

a) Demonstrați că funcția F este derivabilă și $F'(x)=f(x)$.

b) Calculați $\int_0^1 x\,f(x)\,dx$.

c) Calculați $\int_0^1 F(x)\,dx$.

d) Arătați că $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=+\infty$ și calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\cdot F(x)}{f(x)}$.

<u>Soluție</u>:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$ este continuă pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ este primitivabilă și integrabilă pe fiecare interval $[0;\,x]\subset\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ dacă $F_0\in\int f(x)dx$ atunci $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=F_0(x)-F_0(0)$

$\Rightarrow$ F este derivabilă și $F'(x)=f(x)$. 1p

b) $\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{e-1}{2}$ 1p

c) Alegând $u=F(x)$, $v'=1$ $\Rightarrow$ $u'=f(x)$, $v=x$ 1p

$\Rightarrow \int_0^1 F(x)\,dx=x\cdot F(x)\Big|_0^1-\int_0^1 x\cdot F'(x)dx$ 1p

$\Rightarrow \int_0^1 F(x)\,dx=F(1)-\int_0^1 x\cdot f(x)dx=\frac{1-e}{2}$ 1p

d) $t\ge 1 \Rightarrow e^{t^2}\ge e \Rightarrow F(x)=\int_0^x e^{t^2}\,dt\ge\int_0^x e\,dt=ex$, deci $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=+\infty$ 1p

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\cdot F(x)}{f(x)}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F(x)+x\cdot f(x)}{2xe^{x^2}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}+e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+2}{4x^2+2}=\frac{1}{2}$ 1p