



**CONCURSUL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

**ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017**

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

Clasa a IX -a

Problema 1. Un număr natural nenul n se numește *triunghiular* dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$n = 1 + 2 + 3 + \dots + k.$$

Determinați toate perechile de numere triunghiulare (m, n) cu proprietatea că $m - n = 2017$.

BAREM DE CORECTURĂ.

Dacă m, n sunt numere *triunghiulare*, atunci există numerele $p, q \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $m = \frac{p(p+1)}{2}$ și

$$n = \frac{q(q+1)}{2} \dots \dots \dots 2 \text{ p}$$

$$\text{Avem: } \frac{p(p+1)}{2} - \frac{q(q+1)}{2} = 2017 \Leftrightarrow (p - q)(p + q + 1) = 2 \cdot 2017 \dots \dots \dots 2 \text{ p}$$

Obținem că $(p - q, p + q + 1) \in \{(1, 4034); (2, 2017)\}$, de unde $(p, q) \in \{(2017, 2016), (1009, 1007)\} \dots \dots 2 \text{ p}$

Perechile căutate sunt $(m, n) \in \{(2035153, 2033136), (509545, 507528)\} \dots \dots \dots 1 \text{ p}$

Problema 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + ax + b$, unde a și b sunt numere întregi. Știind că $f(0)$ și $f(1)$ sunt numere impare, demonstrați că ecuația $f(x) = 0$ nu are soluții întregi.

BAREM DE CORECTURĂ.

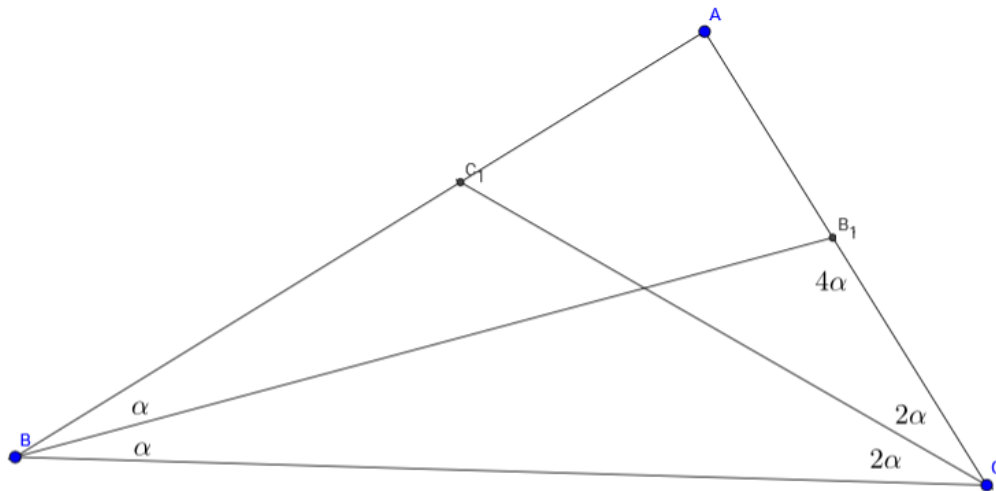
Cum $f(0)$ și $f(1)$ sunt numere impare, rezultă că a și b sunt numere impare. 3 p

Presupunem prin reducere la absurd că ecuația $f(x) = 0$ ar avea măcar o soluție întregă, fie aceasta α ; atunci $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ 1 p

Deoarece a este impar, numerele α și $\alpha + a$ au parități diferite, prin urmare $\alpha^2 + a\alpha$ este număr par. Deducem că $\alpha^2 + a\alpha + b$ este număr impar, deci nenul. Presupunerea făcută este, așadar, falsă, de unde concluzia problemei. 3 p

Problema 3. În triunghiul ABC se consideră bisectoarele interioare BB_1 și CC_1 . Știind că $BB_1 = BC$ și $CC_1 = BC_1$, să se determine unghiurile triunghiului.

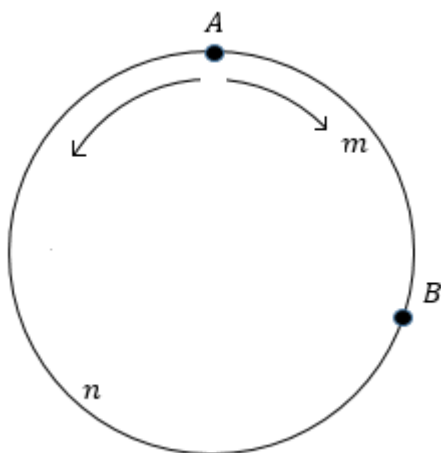
BAREM DE CORECTURĂ.



- Notăm $m(\widehat{B_1BC}) = \alpha$. Rezultă că $m(\widehat{ABC}) = 2\alpha$1 p
- $CC_1 = BC_1 \Rightarrow \Delta CC_1B$ este isoscel $\Rightarrow m(\widehat{C_1CB}) = 2\alpha$2 p
- $BB_1 = BC \Rightarrow \Delta BC_1C$ este isoscel $\Rightarrow m(\widehat{BB_1C}) = m(\widehat{BCB_1}) = 4\alpha$2 p
- Cum $m(\widehat{B_1BC}) + m(\widehat{BCB_1}) + m(\widehat{BB_1C}) = 180^\circ \Rightarrow \alpha + 4\alpha + 4\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$1 p
- Așadar, unghiurile triunghiului ABC sunt $m(\widehat{ABC}) = 40^\circ, m(\widehat{BCA}) = 80^\circ, m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$1 p

Problema 4. Două muște se mișcă uniform pe circumferința unui cerc. Ele pleacă simultan dintr-un punct A de pe circumferință în sensuri contrare. După ce se întâlnesc prima dată într-un punct B de pe circumferință, primei muște i-au mai trebuit 4 secunde ca să ajungă în punctul A , iar celei de-a doua, continuând mersul său, i-au mai trebuit 9 secunde ca să ajungă în punctul A . De câte ori, într-un minut, parcurg circumferința fiecare dintre cele două muște?

BAREM DE CORECTURĂ.



- Fie l lungimea circumferinței cercului.
- Notăm cu x lungimea arcului \widehat{AnB} . Rezultă că lungimea arcului \widehat{BnA} este $(l - x)$1 p
- Fie t timpul necesar parcurgerii distanțelor de la A la B , prima dată, același pentru cele două muște.
- Dacă v_1 este viteza primei muște și v_2 viteza celei de-a doua muște avem:
 $x = t \cdot v_1 = 9v_2$ și $l - x = t \cdot v_2 = 4v_1$2 p
- Obținem $\frac{x}{l-x} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{9v_2}{4v_1} \Rightarrow \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{2}$1 p
- Rezultă: $\frac{x}{l-x} = \frac{3}{2}$ și, de aici $x = \frac{3l}{5}$, iar $l - x = \frac{2l}{5}$1 p

Prima muscă parcurge $\frac{2}{5}l$ în 4 secunde, deci parcurge l în 10 secunde. Așadar, parcurge circumferința de 6 ori într-un minut.....1 p

A doua muscă parcurge $\frac{3}{5}l$ în 9 secunde, deci parcurge l în 15 secunde.

Așadar, parcurge circumferința de 4 ori într-un minut.....1 p

Notă: Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.