CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 8 februarie 2020
PROFIL TEHNIC ŞI SERVICII, RESURSE NATURALE, PROTECŢIA MEDIULUI
SUBIECTE - clasa a IX-a

1. Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ numere reale strict pozitive.

a) Dacă $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt în progresie aritmetică, să se calculeze suma:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}.$$

b) Dacă $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt în progresie geometrică cu rația $q \neq 1$, să se calculeze suma:

$$\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}+\frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}+...+\frac{\sqrt{a_{n-1}}}{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}.$$

2. Din mulțimea $\{-2,-1,0,1,2\}$ se aleg la întâmplare două elemente a și b, nu neapărat distincte. Care este probabilitatea ca ecuația $x^2+2ax+b=0$ să admită rădăcini reale?

3. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x+1}{x}$.

a) Să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot ...\cdot f(2017)$.

b) Demonstrați că $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}<0$, oricare ar fi $x,y\in(0,+\infty), x\neq y$

c) Stabiliți monotonia funcției f.

4. Fie triunghiul ABC cu $M\in(BC)$ astfel încât $\overrightarrow{MC}=-3\overrightarrow{MB}$. Să se demonstreze că

$$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$$

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
“ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală, 8 februarie 2020
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINŢE ALE NATURII
SUBIECTE - clasa a X-a

1. a) Rezolvați ecuația: $5^{1+2x}+6^{1+x}=30+150^{x}$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+8}=3$.

2. Să se calculeze $\log_{12}2$ în funcție de $a=\log_{48}3$.

3. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=[7x+10]$ nu e nici injectivă, nici surjectivă .

4. Fie $k>0$ și $ABCD$ un patrulater convex, $M\in[AD], N\in[BC]$ și $\frac{MA}{MD}=\frac{NB}{NC}=k$. Dacă $AB=a, CD=c$, arătați folosind numerele complexe că $MN\le\frac{a+k\cdot c}{k+1}$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 8 februarie 2020
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINŢE ALE NATURII
SUBIECTE - clasa a XI-a

1. Se dă matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}$. Calculați A^{100}.

2. Determinați $a,b,c\in\mathbb{R}$ pentru care $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^3+2x^2+x+1}-ax^2-bx-c\right)=1$

3. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care îndeplinește simultan condițiile:

i) $f(x)\le 2,(\forall)x\in\mathbb{R}$;

ii) $f\left(\frac{x}{2}\right)\le\frac{1+f(x)}{2},(\forall)x\in\mathbb{R}$.

Arătați că: a) $f(x)\le\frac{f\left(2^{n+1}x\right)}{2^{n+1}}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}\right),(\forall)n\in\mathbb{N},(\forall)x\in\mathbb{R}$;

b) $f(x)\le\frac{3}{2},(\forall)x\in\mathbb{R}$.

4. a) Calculați determinantul: $d_1=\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2-bc&b^2-ac&c^2-ab\\2a+b+c&a+2b+c&a+b+2c\end{vmatrix}$;

b) Calculați determinantul, scriind rezultatul ca produs: $d_2=\begin{vmatrix}x&y&z\\z&x&y\\y&z&x\end{vmatrix}$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 8 februarie 2020
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINŢE ALE NATURII
SUBIECTE - clasa a XII-a

1. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x*y=xy-3x-3y+12$. Calculaţi $A=\frac{1}{101}*\frac{3}{101}*\frac{5}{101}*...*\frac{501}{101}$.

2. Pe $\mathbb{Z}$ definim legea de compoziţie $x\circ y=5xy+6x+6y+6$. Se cere:

a) Determinaţi elementele simetrizabile ale legii date;

b) Rezolvaţi în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $x\circ x\circ x\circ x\circ x=-1$.

3. Calculaţi integrala $I=\int\frac{x^{213}+x^{106}}{\left(x^{107}+2\right)^{213}}dx$, $x>0$.

4. Să se calculeze primitivele funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x\left(x^{100}+1\right)}$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

“ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală, 8 februarie 2020

FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL - ŞTIINŢE ALE NATURII

BAREM - clasa a IX-a

1. Pentru $\begin{array}{l} n=1 \Rightarrow a_2 = 3a_1 = (1+2)a_1 \\ n=2 \Rightarrow a_3 = 6a_1 = (1+2+3)a_1 \end{array}$

Dem. prin inducție că $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2} \cdot a_1$ ...4p

Det. $b_n = \dfrac{n+1}{2} \cdot a_1$ ...1p

Dem. că e progresie aritmetică ...2p

2. Scrie $\left\{\dfrac{2x-1}{3}\right\} = \dfrac{2x-1}{3} - \left[\dfrac{2x-1}{3}\right]$ ...1p

Ecuația devine $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right] + \left[\dfrac{2x-1}{3} + \dfrac{1}{2}\right] = \dfrac{5x-1}{3}$ ...1p

Folosind $[x] + \left[x + \dfrac{1}{2}\right] = [2x] \Rightarrow \left[\dfrac{4x-2}{3}\right] = \dfrac{5x-1}{3}$ ...2p

$\dfrac{5x-1}{3} \le \dfrac{4x-2}{3} < \dfrac{5x-1}{3} + 1$ 1p

$\dfrac{5x-1}{3} = k \in \mathbb{Z}$ Determină $k \in \{-6,-5,-4,-3,-2\}$ ...1p

Finalizare ...1p

3. Luăm A' punctul diametral opus lui A pe cercul circumscris ΔABC ...1p

Dem. că $HBA'C$ e paralelogram ...2p

$\overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$

În $\Delta OHA'$ avem $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA'}$

$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{AO}$ ...1p

$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$ ...1p

$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OC}$ ...1p

Finalizare ...1p

4. Fie $d\cap BC=\{N\}$; M mijlocul lui $[BC]$ ...1p

Din T. Menelaos pt. ΔAMC și punctele P,G,N rezultă $\frac{PC}{PA}\cdot\frac{GA}{GM}\cdot\frac{MN}{NC}=1$ ...2p

Din T. Menelaos pt. ΔAMB și punctele G,Q,N rezultă $\frac{QB}{QA}\cdot\frac{GA}{GM}\cdot\frac{MN}{NB}=1$ ...2p

$\frac{PC}{PA}+\frac{QB}{QA}=\frac{NB}{2MN}+\frac{NC}{2MN}$ ...1p

Finalizare ...1p

Notă:

Nu se acordă punct din oficiu sau fracţiuni de punct.

Orice soluţie corectă diferită de cea din barem se notează cu punctaj maxim.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

“ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală, 8 februarie 2020

PROFIL TEHNIC ŞI SERVICII, RESURSE NATURALE, PROTECŢIA MEDIULUI

BAREM - clasa a X-a

1. Se trec toți logaritmii în baza 2 și se obține

$$E=\frac{1}{\frac{1}{\log_2 x}\cdot\frac{2}{\log_2 x}}\cdot\frac{1}{\frac{2}{\log_2 x}\cdot\frac{3}{\log_2 x}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\frac{n-1}{\log_2 x}\cdot\frac{n}{\log_2 x}}-\frac{n-1}{n}\cdot\log_2^2 x$$ ...3p

Se ajunge la $E=\log_2^2 x\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right)-\frac{n-1}{n}\cdot\log_2^2 x$ ...2p

Se fac calcule și se ajunge la $E=\frac{n-1}{n}\cdot\log_2^2 x-\frac{n-1}{n}\cdot\log_2^2 x=0$ ...2p

2. a) Din condiția de existență $\Rightarrow 7-2\sqrt{x}-x>0$

Not. $\sqrt{x}=t, t>0 \Rightarrow t^2+2t-7<0$ …1p

Se obține $t\in\left(0,-1+2\sqrt{2}\right)$ …2p

De unde $\Rightarrow x\in\left(0,9-4\sqrt{2}\right)$ …1p

b) cum $x\in\mathbb{Z}$ și $x\in\left(0,9-4\sqrt{2}\right)\Rightarrow x\in\{0,1,2,3\}$ …2p

se verifică și se obține $f(3)=2$ …1p

3. a) se aduce ecuația la forma $5\cdot 25^x+6\cdot 6^x=30+6^x\cdot 25^x$ …1p

se obține $\left(5-6^x\right)\left(25^x-6\right)=0$ …2p

finalizare …1p

b) folosind inegalitatea mediilor, se obține $\frac{\log_x y+\log_y z+\log_z x}{3}\geq\sqrt[3]{1}$ …2p

de unde rezultă inegalitatea cerută …1p

4. se notează cu x numărul de pagini citite pe zi și se ajunge la ecuația

$$31\cdot x=\frac{x}{4}+\left(\frac{x}{4}+1\right)+\ldots+\left(\frac{x}{4}+30\right)$$ …3p

se obține $x=20$ …3p

cartea are 620 de pagini …1p

Notă:

Nu se acordă punct din oficiu sau fracţiuni de punct. Orice soluţie corectă diferită de cea din barem se notează cu punctaj maxim.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

“ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală, 8 februarie 2020

PROFIL TEHNIC ŞI SERVICII, RESURSE NATURALE, PROTECŢIA MEDIULUI

BAREM - clasa a XI-a

1. Demonstrează că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 3n-1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Scrie $\begin{pmatrix} 1 & 2008 & 6023 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2007 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Determină $X = \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 1 - 3\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$

2. a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{[x] + [3x]}{x} = 4$ …2p

b) det. A.V. bilat. …1p

det. A.Obl. …4p

3. a) explicitare de modul …1p

condiții de existență …1p

determină $D = [0, 4]$ ...1p

b) determină $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{4-x}}, x \in [0, 2) \\ \sqrt{\frac{4-x}{x}}, x \in [2, 4] \end{cases}$ ...2p

limite laterale, $f(2)$ ...1p

finalizare ...1p

4. a) pentru fiecare calcul se acordă câte un punct ...2p

b) folosind informațiile de la punctul a) se obține cerința ...4p

c) calculează determinantul și arată că e nenul ...1p

Notă:

Nu se acordă punct din oficiu sau fracțiuni de punct. Orice soluție corectă diferită de cea din barem se notează cu punctaj maxim.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

"ADOLF HAIMOVICI"

Etapa locală, 8 februarie 2020

PROFIL TEHNIC ŞI SERVICII, RESURSE NATURALE, PROTECŢIA MEDIULUI

BAREM - clasa a XII-a

1. a) verificare …3p

b) obține $x+\frac{3}{4}\ln\left(x-2\right)+\frac{1}{4}\ln\left(x+2\right)+C$ …4p

2. a) din condiția $f\left(1\right)=l_s\left(1\right)=l_d\left(1\right)$ se obține $a=1$ …3p

b) obține primitivele de forma $F\left(x\right)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+3x+C_1, x<1\\ \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+C_2, x\geq 1\end{cases}$ …3p

obține $C_2=C_1+\frac{2}{3}$ …1p

3. $x*3=3*x=3$ ...1p

Fie $x=\frac{1}{101}*\frac{3}{101}*\ldots*\frac{301}{101}$ și $y=\frac{305}{101}*\ldots*\frac{501}{101}$ ...2p

$A=x*3*y$ ...2p

Finalizare $A=3$ ...2p

4. Calculează $f\left(x*y\right)=\frac{xy-2x-2y+2}{xy+x+y+1}$ ... 3p

Calculează $f\left(x\right)\cdot f\left(y\right)=\frac{xy-2x-2y+2}{xy+x+y+1}$ ...1p

Demonstrează injectivitatea ...2p

Demonstrază surjectivitatea ...1p

Notă:

Nu se acordă punct din oficiu sau fracţiuni de punct.

Orice soluţie corectă diferită de cea din barem se notează cu punctaj maxim.