CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
”TRAIAN LALESCU”, 2006
Clasa a V-a

1. Câte numere naturale verifică dubla inegalitate

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2005 < n < 2 + 4 + 6 + \cdots + 2006?$$

2. Se consideră mulțimile $A = \{2^{n+4} \cdot 3^n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{2^{n+1} \cdot 5^{n+2} + 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Să se arate că:

a) $A \cap B = \emptyset$;

b) $A \cup B$ nu conține niciun pătrat perfect.

3. Din localitatea A spre localitatea B pleacă o mașină cu o viteză de 60 km/h. În același timp, din localitatea C spre localitatea B pleacă o mașină cu o viteză de 52 km/h. Localitatea C se află la o treime din a 5 - a parte din jumătatea drumului din A spre B. După 10 minute, din localitatea A spre localitatea B pleacă o a treia mașină cu o viteză egală cu $\dfrac{3}{2}$ din viteza primei mașini.

Știind că mașina care pleacă din C ajunge în 2 ore și 30 de minute în localitatea D, care se află la 14 km după localitatea B, să se arate că mașinile se întâlnesc într-un punct și să se afle distanța acestui punct de localitatea A.

Clasa a VI-a

1. **a)** Alegeți convenabil semnele + sau − astfel ca rezultatul să fie 517:

$$\pm 2^0 \pm 2^1 \pm 2^2 \pm 2^3 \pm 2^4 \pm 2^5 \pm 2^6 \pm 2^7 \pm 2^8 \pm 2^9 \pm 2^{10}.$$

b) Care este cel mai mic număr natural care poate fi obținut în acest mod? (Justificați răspunsul)

2. Doi călători au plecat în același moment din localitățile A și B, fiecare deplasându-se spre localitatea celuilalt cu viteză constantă. Ei s-au întâlnit la ora 13 și, continuându-și drumul, primul a ajuns în B la ora 17, iar cel de-al doilea în A la ora 22. La ce oră au plecat cei doi în călătorie?

3. În triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle BAC) > 90^\circ$, $(AA'$ și $(BB'$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BAC$, respectiv $\sphericalangle ABC$ ($A' \in BC$, $B' \in AC$). Știind că $(A'B'$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AA'C$, se cere:

a) arătați că $d(B', AA') = d(B', AB)$;

b) aflați $m(\sphericalangle BAC)$.

4. Se dă triunghiul ABC în care $m(\sphericalangle A) > m(\sphericalangle B) > m(\sphericalangle C)$. Mediatoarea segmentului $[AC]$ intersectează $[BC]$ în M. Fie A' piciorul perpendicularei din A pe BC, $u = m(\sphericalangle ABC)$ și $v = m(\sphericalangle ACB)$. Se știe că $m(\sphericalangle A'AM) = u - v$.

a) Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic.

b) Demonstrați că M este mijlocul lui $[BC]$.

c) Dacă $(AD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle A'AM$ ($D \in BC$), aflați $m(\sphericalangle BAD)$.

Clasa a VII-a

1. Fie $\triangle ABC$ un triunghi oarecare, M, N, P mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$, respectiv $[AB]$, iar G centrul de greutate al triunghiul $\triangle ABC$. Fie U și V două puncte interioare ale triunghiului, A_1, B_1, C_1 punctele în care dreptele AU, BU, CU intersectează laturile $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$, iar A_2, B_2, C_2 punctele în care dreptele AV, BV, CV intersectează laturile $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$, iar M_2, N_2, P_2 punctele în care dreptele AV, BV, CV intersectează laturile $[NP]$, $[MP]$, $[MN]$ ale triunghiului median $\triangle MNP$.

Dacă punctele A_1 și A_2 sunt simetrice față de M, punctele B_1 și B_2 sunt simetrice față de N, iar punctele C_1 și C_2 sunt simetrice față de P, atunci numim punctele U și V *reciproce în triunghiul* $\triangle ABC$.

Arătați că dacă U și V sunt puncte reciproce în triunghiul $\triangle ABC$, atunci:

a) punctele A_1, G și M_2 sunt coliniare;

b) triunghiurile $\triangle A_1B_1C_1$ și $\triangle M_2N_2P_2$ sunt asemenea.

2. Pentru trei numere pozitive oarecare x, y, z, fie

$$E(x, y, z) = \frac{x^2}{(y-z)(x+y+z)} - \frac{y^2}{(x+z)(x+y-z)} + \frac{z^2}{(x+y)(x+y+z)}.$$

Arătați că:

a) $E(x, y, z) = E(\alpha \cdot x, \alpha \cdot y, \alpha \cdot z)$, $(\forall)$ x, y, z, $\alpha \in (0, \infty)$.

b) Dacă $0 < x \leqslant y \leqslant z$, $x \neq z$ și $0 < \alpha < z - x$, atunci:

$$E(x + \alpha, y, z - \alpha) < E(x, y, z).$$

c) Dacă $x + y - z = 1$, atunci $E(x, y, z) \geqslant E\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

d) $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}$, $(\forall)$ x, y, $z > 0$.

3. Fie $ABCD$ un trapez, cu $AB \parallel CD$ și $AD \nparallel BC$. Arătați că:

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2 \cdot AB \cdot CD.$$

4. Pe o tablă de șah de dimensiuni 3×3 se află 6 pioni. Arătați că există $2k$ pioni $P_1, P_2, \ldots, P_{2k}$, inde $k \in \{2, 3\}$, astfel încât P_1 se află pe aceeași linie cu P_2, P_2 pe aceeași coloană cu P_3, P_3 se află pe aceeași linie cu P_4, ... , P_{2k-1} P_1 pe o aceeași linie cu P_{2k}, iar P_{2k} pe o aceeași coloană cu P_1.

Formulați un enunț similar în cazul unei table 4×4.

Clasa a VIII-a

1. Să se determine numerele reale x pentru care expresia:

$$E = |x+1| + |x-2| + |x+3| + |x-4| + \cdots + |x-2005| + |x+2006|$$

este număr rațional.

2. Fie $n \in \mathbb{N}$. Considerând ecuația $\sqrt{x^2+1} + x = 2n+1$,

a) Să se arate că această ecuație are o singură soluție ce este număr rațional pozitiv.

b) Să se determine partea întreagă a soluției.

c) Să se arate că soluția nu este naturală și să se precizeze prima zecimală după virgulă în scrierea zecimalâ a acesteia.

3. Fie tetraedrul $PABC$. Notăm cu x, y și z lungimile laturilor PA, PB și PC. Notăm cu S aria triunghiului ABC și cu h lungimea înălțimii din P.

Să se arate că dreptele PA, PB și PC sunt două câte două perpendiculare dacă și numai dacă:

$$S = \frac{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2}}{2} \text{ și } h = \frac{xyz}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2}}.$$

4. Un tetraedru are toate înălțimile egale și una dintre fețe triunghi echilateral. Să se arate că tetraedrul este regulat.