Universitatea de Vest Timişoara **Caransebeş 23 – 25 martie 2007**
Inspectoratul Şcolar Caraş Severin

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu”
Ediţia a XXI-a

Subiect clasa a IX-a

Problema 1: Fie E o mulţime nevidă, $A, B \subseteq E$ şi funcţia $f : P(E) \to P(E) \times P(E)$ definită prin

$$f(X) = (X \cup A, X \cap B),\ \forall X \in P(E).$$

Să se arate că f este injectivă dacă şi numai dacă $A \subseteq B$.

Prelucrare I. Caşu

Problema 2: Fie ABCDEF un hexagon regulat şi M, N două puncte pe segmentele CF şi respectiv EC astfel încât:

$$\frac{CM}{CF} = \frac{EN}{EC} = r.$$

Să se determine valoarea lui *r* pentru care punctele B, M, N sunt coliniare.

I. Caşu

Problema 3: Fie ABC un triunghi, M un punct în interiorul acestuia şi l_1, l_2, l_3 lungimile segmentelor determinate de laturile triunghiului ABC pe dreptele paralele duse prin M la BC, CA respectiv AB. Să se arate că:

$$\frac{l_1}{BC} + \frac{l_2}{CA} + \frac{l_3}{AB} = 2.$$

*** * ***

Problema 4: Să se rezolve în mulţimea numerelor reale sistemul:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 0 \\ x^5 + y^5 + z^5 = 0 \\ x^{2007} + y^{2007} + z^{2007} = 0. \end{cases}$$

I. Caşu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru 3 ore
Pentru fiecare problemă corect rezolvată se acordă 7 puncte.

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu”
Ediţia a XXI-a

Subiect clasa a X-a

Problema 1: Determinaţi toate funcţiile monotone şi surjective $f : R \to Z$ care satisfac simultan următoarele proprietăţi:
a) $f(f(x)) = f(x), \forall x \in R$
b) $f(2x) - f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right), \forall x \in R$.

Gh. Silberberg

Problema 2: Fie $z \in C$ cu $|z| < 1$. Demonstraţi că:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{2}{1+z}\right) > 1$$

Prelucrare Gh. Silberberg

Problema 3: Fie A o mulţime de cardinal *a* şi B o submulţime a sa de cardinal *b*, unde *a* şi *b* sunt numere naturale cu $a \geq b$. Exprimaţi în funcţie de *a* şi de *b* numărul soluţiilor din $P(A) \times P(A)$ pentru fiecare din următoarele sisteme de ecuaţii:

$$(S_1)\begin{cases} X \cup Y = A \\ X \cap Y = B \end{cases}$$

$$(S_2)\begin{cases} X \cup Y = A \\ |X \cap Y| = b \end{cases}$$

* * *

Problema 4: Determinaţi unghiurile triunghiului ABC dacă:

$$\sin A \sin B \cos C = -\frac{1}{8}$$

* * *

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru 3 ore
Pentru fiecare problemă corect rezolvată se acordă 7 puncte.

Universitatea de Vest Timişoara **Caransebeş 23 – 25 martie 2007**
Inspectoratul Şcolar Caraş Severin

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu”
Ediţia a XXI-a

Subiect clasa a XI-a

1. Se consideră şirul $(x_n)_n$ definit prin : $x_0 = a \le 1$, $x_1 = b \ge 1$ şi $x_{n+2} = \frac{2}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}\min\{1, x_n\}$ pentru orice $n \in$ **N.** Să se arate că dacă $x_2 \ge 1$, atunci şirul $(x_n)_n$ este convergent şi determinaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Selecţie T. Ceauşu

2. (a). Daţi exemplu de matrice $A, B \in M_2$ (**R**) astfel încât AB=BA, $A^2=B^2$ şi $\det(A - B) \ne 0$.

(b). Demonstraţi că dacă $A, B \in M_3$ (**R**) au proprietăţile AB=BA, $A^3=B^3$, atunci $\det(A - B) = 0$.

D. Miheţ

3. Fie $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in M_2$ (**Q**) o matrice nesingulară şi f: **R-Q→R**, $f(x) = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1}$. Notăm $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ şi $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n\ ori}$, $n \in$ **N*.**

(a). Demonstraţi că dacă $x_0 \in$ R-Q, atunci şi $f^n(x_0)$ este definit pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ şi $f^n(x_0) = \frac{a_n x_0 + b_n}{c_n x_0 + d_n}$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

(b). Arătaţi că dacă $b_1 c_1 \ne 0$ şi există $m \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $b_m c_m = 0$, atunci $A^m = \lambda I_2$ cu $\lambda \in \mathbf{Q}^*$.

(c). În ipotezele de la (b), notăm $y_n = f^n(x_0)$. Aflaţi numărul elementelor mulţumii $M = \{x_0 \in \text{R-Q} \mid (y_n)_n \textit{ este convergent}\}$.

D. Miheţ, Vasile Pop

4. Funcţia g: **R→R** are proprietatea lui Darboux şi $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$. Să se arate că dacă f: **R→R** este o funcţie periodică şi există $\lim\limits_{x\to\infty} f(g(x))$, atunci f este constantă pe **R.**

D. Miheţ

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru 3 ore
Pentru fiecare problemă corect rezolvată se acordă 7 puncte.

Universitatea de Vest Timişoara **Caransebeş 23 – 25 martie 2007**
Inspectoratul Şcolar Caraş Severin

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu”
Ediţia a XXI-a

Subiect clasa a XII-a

1) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\frac{1}{(1+x^2)(1+e^{nx})(1+x^{2n})}dx.$

M. Chiş

2) Considerăm funcţiile $f, g : [0,\infty)\to\mathbf{R}$ date de:

$$f(t)=e^{ta}\int_0^t e^{-as}\cos(bs)ds,\ g(t)=e^{ta}\int_0^t e^{-as}\sin(bs)ds$$

unde a şi b sunt numere reale date.

a) Arătaţi că dacă a<0 atunci

$$\max\{|f(t)|,|g(t)|\}\le -\frac{1}{a}\text{ pentru orice } t\ge 0.$$

b) Dacă pentru fiecare $b\in\mathbf{R}$, funcţiile f şi g sunt mărginite atunci $a<0$.

C. Buşe

3) Fie $(G,\bullet)$ un grup abelian finit şi p un număr prim, cu $p\mid |G|$.

a) Dacă H este un subgrup al lui G cu $p\nmid |H|$, iar $x\in G\setminus H$ are proprietatea că $x^p\in H$ arătaţi că există $y\in xH$ cu $ord(y)=p$.

b) Arătaţi că există $x\in G$ cu $ord(x)=p$.

* * *

4) Fie α,β două numere complexe diferite şi A o matrice pătratică de ordinul 5 cu elemente numere complexe.
Rezolvaţi sistemul cu necunoscuta $X\in M_{5,1}(C)$:

$$\begin{cases}(A-\alpha I)^2X=O\\(A-\beta I)^3X=O\end{cases},$$

I fiind matricea unitate de ordinul 5.

C. Buşe

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru 3 ore
Pentru fiecare problemă corect rezolvată se acordă 7 puncte.