Concursul interjudeţean de matematică Traian Lalescu

Ediţia a 23-a, Arad, 27-29.III.2009

clasa a IX-a

1. a) Arătaţi că pentru orice numere naturale nenule a, b, n,

$$(a+b)^n = \mathcal{M}a^2 + n \cdot a \cdot b^{n-1} + b^n \,.$$

(prin $\mathcal{M}a^2$ înţelegem un multiplu al numărului a^2.)
b) Determinaţi ultimele patru cifre ale numărului 2803^{2009}.

2. Fie ΔABC un triunghi oarecare, $\lambda \in (0,\infty) \setminus \{1\}$, $D \in (BC)$ şi $E \in BC \setminus (BC)$ două puncte astfel încât

$$\frac{BD}{CD} = \frac{BE}{CE} = \lambda \,,$$

iar $M \in AB$ şi $N \in AC$ punctele în care paralela prin D la AE intersectează dreptele AB, respectiv AC.
a) Determinaţi $t, u, v, w \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\overrightarrow{AD} = t\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AC} \qquad \text{şi} \qquad \overrightarrow{AE} = v\overrightarrow{AB} + w\overrightarrow{AC} \,.$$

b) Determinaţi $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AM} = \beta\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AN} = \gamma\overrightarrow{AC}$.
c) Arătaţi că D este mijlocul segmentului (MN).

3. Fie $a, b, c > 0$ trei numere pozitive oarecare. Arătaţi că
a)

$$a^2 + b^2 > ab\sqrt{3}\,, \quad a^2 + c^2 > ac\sqrt{3}\,, \quad b^2 + c^2 > bc \,.$$

b)

$$\sqrt{a^2 - ab\sqrt{3} + b^2} + \sqrt{a^2 - ac\sqrt{3} + c^2} \geq \sqrt{b^2 - bc + c^2} \,.$$

c) În inegalitatea de la b) are loc egalitatea dacă şi numai dacă

$$\frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \,.$$

4. Fie $\Delta\, ABC$ un triunghi oarecare de laturi $a = BC$, $b = CA$ şi $c = AB$, cu cercul circumscris $\mathcal{C}(O, R)$, cercul înscris $\mathcal{C}(I, r)$ şi cercul exînscris $\mathcal{C}(I_a, r_a)$ tangent interior unghiului $\widehat{BAC}$ şi laturii (BC), aflat în exteriorul triunghiului $\Delta\, ABC$.
a) Arătaţi că

$$\begin{aligned}(a+b+c)\overrightarrow{PI} &= a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC}\,,\\ (-a+b+c)\overrightarrow{PI_a} &= -a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC}\,,\end{aligned}$$

pentru orice punct P din planul triunghiului $\Delta\, ABC$.
b) Au loc egalităţile

$$OI^2 = R^2 - 2Rr \quad \text{şi} \quad OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a \,.$$

Notă: Timp de lucru - 3 ore
Subiect propus de lect.dr. Mihai Chiş

Concursul Interjudețean de Matematică Traian Lalescu
Ediția a XXIII-a, Arad, 27-29 Martie 2009
Clasa a X-a

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația:
$$x^{x^{2009}} = 2009.$$

2. Fie *ABCD* un paralelogram şi *M* un punct variabil în planul paralelogramului.
   a) Să se determine valoarea minimă a expresiei $MA \cdot MC + MB \cdot MD$.
   b) Să se arate că dacă *M* nu este unul dintre vârfurile paralelogramului *ABCD*, atunci se poate construi un patrulater convex cu segmentele (MA), (MB), (MC) şi (MD).

3. Numerele complexe a, a_1, a_2, a_3, a_4 au acelaşi modul şi verifică egalitățile:
$$a^2 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2.$$
Să se arate că a este egal cu unul dintre numerele a_1, a_2, a_3, a_4 sau cu unul dintre opusele acestora.

4. a) Să se arate că dacă $g: X \to Y$ este o funcție injectivă, atunci pentru orice submulțimi X_1, X_2 ale lui X are loc egalitatea
$$g(X_1 \setminus X_2) = g(X_1) \setminus g(X_2).$$
(Prin definiție, $g(Z) = \{g(z) \mid z \in Z\}$, pentru orice submulțime Z a lui X.)
b) Să se arate că nu există funcții $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ care au proprietatea că
$$f(f(n)) = n + 2009$$
pentru orice număr natural n.

Subiect propus de Ioan Caşu

NOTĂ. Timp de lucru - trei ore.

Concursul Interjudeţean de Matematică Traian Lalescu
Ediţia a XXII-a, Arad, 27-29 Martie 2009
Clasa a XI-a

1. Fie $x_n = \begin{cases} 1, & n \text{ este pătrat perfect,} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$ şi $s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$.

   Să se arate că $\dfrac{s_n}{n} \to 0$ şi să se studieze convergenţa şirului $\dfrac{s_n}{\sqrt{n}}$.

   $(\star\star\star)$

2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$ o matrice cu proprietatea că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A \cdot A^T = k \cdot I_n + J$, unde $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Arătaţi că A este inversabilă.

   b) Pentru $n = 7$ arătaţi că $AJ - JA = O_7$.

   E. Cismaş

3. Fie $\mathcal{A}_1 = \{(\lambda - \mu)E + \mu I_2 \mid E \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ E^2 = E\}$ şi $\mathcal{A}_2 = \{\nu(F + I_2) \mid \nu \in \mathbb{C},\ F \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ F^2 = O_2\}$. Arătaţi că:
   1) $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \{\rho I_2 \mid \rho \in \mathbb{C}\}$.
   2) Calculaţi A^n pentru $A \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ şi $n \in \mathbb{N}$.

   C. Buşe, V. Radu

4. Fie $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, cu proprietatea:

   $$|f(x + y) - f(x)| \leq \ln\left(\frac{1 + x + y}{1 + x}\right),\ \forall x, y \in [0, \infty).$$

   a) Determinaţi $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât mulţimea valorilor lui f să aibă exact m elemente.
   b) Să se arate că următorul şir recurent:

   $$x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2},\ n \geq 0,$$

   are limită pentru orice $x_0 \geq 0$.

   V. Radu

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Concursul Interjudeţean de Matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXIII-a, Arad, 27-29 Martie 2009
Clasa a XII-a

I. *Fie* $\mathcal{M} = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} : \quad f(t) = u(t) + iv(t), t \in [0,1], u$ *şi* v *fiind funcţii reale, derivabile pe* $[0,1]\}$. *Pentru* $f \in \mathcal{M}$, *definim:*

$$(\Delta f)(t) = u'(t) + iv'(t), \quad t \in [0,1].$$

Arătaţi că:

1. $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f, \quad f, g \in \mathcal{M}$.

2. $f^2\Delta(\frac{1}{f}) = -\Delta f, \quad f \in \mathcal{M}, f \neq 0$.

3. *Pentru* $f(t) = \frac{1}{t+i}, t \in [0,1]$ *avem* $f \in \mathcal{M}$ *şi* $\Delta f \in \mathcal{M}$.

4. *Calculaţi derivata de ordinul* $n \geq 1$ *a funcţiei*

$$u : (0,1] \to \mathbb{R}, u(x) = arctgx.$$

5. *Fie* $\rho : [0,1] \to [0,1]$ *şi* $r : [0,1] \to \mathbb{R}$ *două funcţii continue. Arătaţi că*

$$\left(\int_0^1 \rho(t)\cos(r(t))dt\right)^2 + \left(\int_0^1 \rho(t)\sin(r(t))dt\right)^2 \leq \int_0^1 \rho(t)dt.$$

II. *Fie* $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ *şi* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funcţii continue. Arătaţi că:*

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 + \left(\int_a^b g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}dx\right)^2.$$

III. *Fie* A *un inel şi* $x, y \in A$ *cu* $xy + yx + 1 = 0$. *Arătaţi că dacă* $x - y$ *nu este inversabil atunci* $x^3 + y^3 + y$ *nu este inversabil.*

Prof. **Nedeianu Dan**

IV. *Fie* $\mathcal{S} = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad x = (x_n)\}$ *Arătaţi că:*

1. $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ *(adunarea şi înmulţirea uzuală a şirurilor) este un inel în care mulţimea divizorilor lui zero este infinită.*

2. *Funcţia* $\Delta : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ *dată de* $(\Delta x)(n) = x(n+1) - x(n)$ *este un morfism surjectiv al lui* $(\mathcal{S}, +)$.

3. *Calculaţi* $K_1 = \{x \in \mathcal{S} : \quad \Delta x = 0\}$ *şi* $K_2 = \{x \in \mathcal{S} : \quad \Delta^2 x = 0\}$.

4. *Calculaţi* $\Delta^k x$, *unde* $x = ((-1)^n)$.

Notă: *Timp de lucru* 3 *ore.*

Probleme selectate de **Constantin Buşe**

Barem de corectare la clasa a IX-a

1.

start	1p
a) verifică pentru $n = 1$	1p
efectuează pasul de inducţie	1p
finalizează corect demonstraţia prin inducţie	1p
b) foloseşte a) şi arată că $2803^{2009} \equiv 2009 \cdot 2800 \cdot 3^{2008} + 3^{2009} (mod\, 10^4)$	1p
observă că $3^4 \equiv 1(mod\, 2^4)$ şi deduce că $3^{500} \equiv 1(mod\, 2^4)$	1p
cu teorema lui Wilson arată că $3^{500} \equiv 1(mod\, 5^4)$	1p
deduce că $3^{500} \equiv 1(mod\, 10^4)$ şi $3^{2000} \equiv 1(mod\, 10^4)$	1p
deduce că $2803^{2009} \equiv 2800 \cdot 3^{10} + 3^9 = 2800 \cdot 59049 + 19683 (mod\, 10^4)$	1p
obţine că $2803^{2009} \equiv 2800 \cdot 49 + 9683 = 2800 \cdot (50 - 1) + 9683 \equiv 9683 - 2800 = 6883 (mod\, 10^4)$	1p
Total	**10p**

2.

start	1p
a) din $D \in (BC)$ şi $BD = \lambda CD$ deduce $\overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{DC}$	1p
şi obţine $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AB} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AC}$, deci $t = \frac{1}{1+\lambda}$ şi $u = \frac{\lambda}{1+\lambda}$	1p
din $E \in BC \setminus (BC)$ şi $BE = \lambda CE$ deduce $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{CE}$	
şi obţine $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{AB} + \frac{-\lambda}{1-\lambda}\overrightarrow{AC}$, deci $v = \frac{1}{1-\lambda}$ şi $w = \frac{-\lambda}{1-\lambda}$	1p
b) Din $DM \parallel AE$ deduce că $\frac{t-\beta}{u} = \frac{v}{w} = -\frac{t}{u}$	1p
şi $\beta = 2t = \frac{2}{1+\lambda}$	1p
Din $DN \parallel AE$ deduce că $\frac{u-\gamma}{t} = \frac{w}{v} = -\frac{u}{t}$	1p
şi $\gamma = 2u = \frac{2\lambda}{1+\lambda}$	1p
c) Observă că $\overrightarrow{AD} = t\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$	1p
şi deduce că D este mijlocul segmentului (MN)	1p
Total	**10p**

3.

start	1p
a) aplică inegalitatea mediilor şi obţine inegalităţile	1p
(soluţie algebrică)	
b) scrie inegalitatea de demonstrat sub forma	
$\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2}b - a)^2 + (\frac{1}{2}b)^2} + \sqrt{(a - \frac{\sqrt{3}}{2}c)^2 + (\frac{1}{2}c)^2} \geq \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c))^2 + (\frac{1}{2}(b+c))^2}$	3p
şi foloseşte inegalitatea lui Minkowski pentru a obţine rezultatul	1p
c) pune condiţia de egalitate în inegalitatea lui Minkowski $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}b-a}{\frac{1}{2}b} = \frac{a-\frac{\sqrt{3}}{2}c}{\frac{1}{2}c}$	2p
şi obţine rezultatul	2p
(soluţie geometrică)	
b) consideră puncte O, A, B, C în plan cu $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$,	
$m(\widehat{BOC}) = 60°$, $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AOC}) = 30°$	2p
arată că $AB = \sqrt{a^2 - ab\sqrt{3} + b^2}$, $AC = \sqrt{a^2 - ac\sqrt{3} + c^2}$, $BC = \sqrt{b^2 - bc + c^2}$	1p
aplică inegalitatea triunghiului $AB + AC \geq BC$ şi obţine rezultatul	1p
c) cazul de egalitate are loc exact când $A \in (BC)$, adică OA este bisectoarea interioară în $\Delta\, OBC$	1p
aplică teorema bisectoarei $\frac{AB}{OB} = \frac{AC}{OC}$	1p
şi obţine că $\left(\frac{a}{b} - \frac{a}{c}\right) \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{c} - \sqrt{3}\right) = 0$	1p
deduce că $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = \sqrt{3}$, sau $b = c$ şi $a = \frac{\sqrt{3}}{2}b$ şi obţine concluzia	1p
Total	**10p**

4.

start	1p
a) Cu $D \in AI \cap BC$, aplică teorema bisectoarei în triunghiul $\Delta\, ABC$	
şi obţine $\overrightarrow{AD} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$	2p
aplică teorema bisectoarei(interioare şi exterioare) în $\Delta\, BAD$	
şi obţine $\overrightarrow{AI} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{AI_a} = \frac{b}{-a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{-a+b+c}\overrightarrow{AC}$,	2p
de unde deduce egalităţile din enunţ	1p
b) Pentru $P = O$, ridică egalităţile de la a) la pătrat	1p
foloseşte că $2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2R^2 - AB^2$	1p
deduce că $OI^2 = R^2 - \frac{abc}{a+b+c}$ şi $OI_a^2 = R^2 + \frac{abc}{-a+b+c}$	1p
foloseşte $abc = 4RS = 4Rrp = 4Rr_a(p-a)$ şi obţine egalităţile cerute	1p
Total	**10p**

Concursul Interjudețean de Matematică Traian Lalescu
Ediția a XXIII-a, Arad, 27-29 Martie 2009

Barem – Clasa a X-a

Problema 1

Start … 1p

Arată că nu avem soluții cu $0 < x \le 1$ ... 1p

Cu substituția $x^{2009} = y$ reduce ecuația la $y^y = 2009^{2009}$ ... 2p

Demonstrează că funcția $t \mapsto t^t$ este strict crescătoare pentru $t > 1$ ... 4p

Finalizează şi obține soluția unică a ecuației $x = 2009^{\frac{1}{2009}}$ ... 2p

Problema 2

Start ... 1p

Alege un sistem de axe cu originea în punctul de intersecție al diagonalelor lui *ABCD* ... 1p

Din *A(a)* şi *B(b)* deduce *C(-a)* şi *D(-b)* ... 1p

Scrie $|z-a|\cdot|z+a|+|z-b|\cdot|z+b|=|z^2-a^2|+|z^2-b^2|\ge|a^2-b^2|=|a-b|\cdot|a+b|$ ... 2p

Deduce că $MA\cdot MC+MB\cdot MD\ge AB\cdot BC$ şi observă că egalitatea se atinge pentru (de exemplu) $M=B$, iar valoarea minimă cerută este deci *AB·BC* ... 1p

Scrie $MA+MB+MC=|z-a|+|b-z|+|z+a|\ge|(z-a)+(b-z)+(z+a)|=|z+b|=MD$ (*) ... 1p

Scrie explicit când se realizează egalitatea în $|z_1|+|z_2|\ge|z_1+z_2|$ şi arată că nu poate avea loc egalitate în (*) ... 2p

Deduce $MA+MB+MC>MD$ şi analoagele, apoi afirmă că de aici rezultă concluzia ... 1p

Problema 3

Start ... 1p

Pentru cazul $a=a_1+a_2+a_3+a_4$ calculează produsul

$(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)(a-a_4)=a^4-s_1a^3+s_2a^2-s_3a+s_4$, unde $s_1=\sum a_i$, $s_2=\sum a_ia_j$, $s_3=\sum a_ia_ja_k$, $s_4=a_1a_2a_3a_4$ ... 2p

Observă că din ipoteza $(a_1+a_2+a_3+a_4)^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2$ rezultă $s_2=0$ ... 1p

Observă că $a^4-s_1a^3=0$ ... 1p

Trecând la conjugate în $a=a_1+a_2+a_3+a_4$ şi ținând cont de egalitatea modulelor obține $\frac{1}{a}=\frac{s_3}{s_4}$, adică $-s_3a+s_4=0$ ... 3p

Deduce din cele de mai sus $(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)(a-a_4)=0$ şi finalizează acest caz ... 1p

Pentru cazul $a=-(a_1+a_2+a_3+a_4)$ afirmă că se procedează similar, calculând $(a+a_1)(a+a_2)(a+a_3)(a+a_4)$ ... 1p

Problema 4
Start ... 1p
Demonstrează afirmația de la a) prin dublă incluziune ... 2p
Deduce că *f* este funcție injectivă ... 1p
Consideră incluziunile $f^{(2)}(N) \subseteq f(N) \subseteq N$, unde $f^{(2)} = f \circ f$ ... 1p
Consideră mulțimile $A = N \setminus f(N); B = f(N) \setminus f^{(2)}(N)$; din injectivitatea funcției *f* şi punctul a) deduce că $f(A) = B$... 2p
Observă că *A, B* sunt disjuncte ... 1p
Observă că $A \cup B = N \setminus f^{(2)}(N) = \{0,1,...,2008\}$... 1p
Deoarece *A, B* au acelaşi număr de elemente (între *A* şi *B* existând o bijecție) ajunge la contradicția că 2009 este par ... 1p

Barem de corectare, clasa a XI-a, Problema 1

Se observă că $s_n = k, \ \forall n \in \{k^2, k^2+1, ..., (k+1)^2-1\}$. Prin urmare $s_n = [\sqrt{n}], \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Avem relaţiile $0 \leq \frac{s_n}{n} = \frac{[\sqrt{n}]}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ şi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Din criteriul cleştelui $\frac{s_n}{n} \to 0$.

Deasemenea avem inegalităţile $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} < \frac{s_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 1,$$

din criteriul cleştelui rezultă că şirul $\frac{s_n}{\sqrt{n}}$ este convergent şi are limita 1.

Barem de corectare, clasa a XI-a, Problema 2

Start (1p)

a) Calculul pentru $\det(A \cdot A^T) = (n+k)k^{n-1}$ se face folosind proprietăţile determinanţilor. (2p)

$(n-k)k^{n-1} = \det(A \cdot A^T) = \det(A)\det(A^T) = \det(A)^2 \neq 0$, deci matricea A este inversabilă. (2p)

b) Din relaţia din enunţ rezultă că suma pătratelor elementelor de pe linii este egală cu $k+1$. Deoarece elementele sunt 0 şi 1, suma pătratelor elementelor de pe o linie este egaă cu suma elementelor de pe linia respectivă. Atunci şi suma elementelor de pe fiecare linie este $k+1$. Se obţine astfel relaţia $AJ = (k+1)J$. (2p)

A este inversabilă, şi înmulţim relaţia precedentă cu A^{-1} la stânga şi obţinem $A^{-1}J = \dfrac{1}{k+1}J$.

Folosim relaţia din enunţ înmulţind-o cu A^{-1} la stânga obţinem $A^T = kA^{-1} + A^{-1}J = kA^{-1} + \frac{1}{k+1}J$. Înmulţim ąceastă relaţie cu J la dreapta şi folosim faptul că $J^2 = 7J$ şi obţinem

$$A^TJ = kA^{-1}J + \frac{7}{k+1}J = \frac{k}{k+1}J + \frac{7}{k+1}J = \frac{k+7}{k+1}J.$$

Transpunem şi obţinem $JA = \dfrac{k+7}{k+1}J$. (2p)

Folosim faptul că $Tr(AJ) = Tr(JA)$ şi obţinem că $k+1 = \dfrac{k+7}{k+1}$. Folosind relaţiile de mai sus $AJ = JA$. (1p)

Barem de corectare, clasa a XI-a, Problema 3

Start (1p)

a) Fie $A \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$. Atunci există $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ astfel încât $A = (\lambda - \mu)E + \mu I_2 = \nu(F + I_2)$, unde $E, F \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $E^2 = E$, $F^2 = O_2$. (1p)

Această relaţie se scrie echivalent $(\lambda - \mu)E - \nu F = (\mu - \nu)I \quad (\star)$. Din această relaţie se obţine uşor că $EF = FE$ înmulţind la dreapta, respectiv la stânga cu E. (2p)

Ridicând la pătrat relaţia obţinem

$$
\begin{aligned}
&(\lambda - \mu)^2 E^2 + \nu^2 F^2 - 2\nu(\lambda - \mu)EF = (\mu - \nu)^2 I_2 \\
\Longleftrightarrow\ &(\lambda - \mu)^2 E - 2\nu(\lambda - \mu)EF = (\mu - \nu)^2 I_2 \\
\Longleftrightarrow\ &(\lambda - \mu)E((\lambda - \mu)I_2 - 2\nu F) = (\mu - \nu)^2 I_2.
\end{aligned}
$$

(2p)

Cazul I. $\mu \neq \nu$. Atunci matricea E este inversabilă şi din $E^2 = E$ rezultă că $E = I_2$. Deci $A = \lambda I_2$. (1p)

Cazul II. $\mu = \nu$. Din $(\star) \Rightarrow (\lambda - \mu)E = \nu F$. Ridicând la pătrat avem $(\lambda - \mu)^2 E = O_2$.

i) Dacă $\lambda = \mu$ atunci $A = \mu I_2$.

ii) Dacă $\lambda \neq \mu$ atunci $E = O_2$ şi $A = \mu I_2$. (1p)

Prin urmare, A poate avea numai forma $A = \rho I_2$, $\rho \in \mathbb{C}$. Este evident că orice astfel de matrice aparţine mulţimii $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$.

b) $A \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow A^n = (\lambda^n - \mu^n) + \mu^n I_2$. (1p)

$A \in \mathcal{A}_2 \Rightarrow A^n = \nu^n(nF + I_2)$. (1p)

Barem de corectare, clasa a XI-a, Problema 4

a) Demonstrăm că f este o funcţie continuă. Fie $x_0 \geq 0$. Atunci avem

$$|f(x_0+y)-f(x_0)| \leq \ln\left(\frac{1+x_0+y}{1+x_0}\right).$$

Dacă trecem la limită pentru $y \to 0$ în relaţia precedentă obţinem că $f(x_0+y) \to f(x_0)$. Prin urmare $\lim\limits_{x\to x_0, x>x_0} f(x) = f(x_0)$.

Pentru $x_0 > 0$ şi $y \geq 0$ cu $x_0 - y \geq 0$, folosind relaţia din enunţ avem:

$$|f(x_0)-f(x_0-y)| \leq \ln\left(\frac{1+x_0}{1+x_0-y}\right),\ x_0>0,\ x_0-y \geq 0.$$

Trecem la limită pentru $y \to 0$ în relaţia precedentă şi obţinem că $f(x_0-y) \to f(x_0)$. Prin urmare $\lim\limits_{x\to x_0, x<x_0} f(x) = f(x_0)$.

Din cele de mai sus, funcţia f este continuă. Prin urmare f are proprietatea Darboux şi $f([0,\infty)$, care este chiar imaginea lui f este un interval.

Un interval nu poate avea un număr finit de puncte, decât dacă intervalul este redus la un punct. Deci singura valoare pentru m astfel încât imaginea lui f să aibă exact m elemente este $m = 1$.

b) $|f(x+y)-f(x)| \leq \ln\left(\frac{1+x+y}{1+x}\right) = \ln\left(1+\frac{y}{1+x}\right) \leq \frac{y}{1+x} \leq y,\ \forall[0,\infty) \iff |f(a)-f(b)| \leq |a-b|,\ \forall a,b \in [0,\infty)$. (aceasta este o altă varantă pentru a demonstra continuitatea lui f)

Fie $x \leq y \in [0,\infty)$. Atunci $\frac{x+f(x)}{2} - \frac{y+f(y)}{2} = \frac{x-y}{2} + \frac{f(x)-f(y)}{2} \leq \frac{x-y}{2} + \frac{|f(x)-f(y)|}{2} \leq \frac{x-y}{2} + \frac{|y-x|}{2} = \frac{x-y}{2} + \frac{y-x}{2} = 0$.

Deci $x \leq y \Rightarrow \frac{x+f(x)}{2} \leq \frac{y+f(y)}{2}$.

Prin urmare dacă $x_0 \leq f(x_0)$ se demonstrează inductiv că şirul este crescător, iar dacă $x_0 \geq f(x_0)$ atunci şirul este descrescător.

Prin urmare şirul (x_n) este monoton şi astfel are limită.

Concursul Interjudeţean de Matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXIII-a, Arad, 28-30 Martie 2009
Clasa a XII-a
Barem de corectare

I.

- **1.** **(1p)**
- **2.** Aplică formula precedentă pentru $g = \frac{1}{f^2}$. **(1p)**
- **3.** $\Delta(\frac{1}{t+i}) = -\frac{1}{(t+i)^2}$ şi calculele aferente. **(1p)**
- **4.** $u'(t) = \frac{1}{t^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{t-i} - \frac{1}{t+i}\right)$ **(1p)**.

$$u^{(n)}(t) = \left(\frac{1}{t^2+1}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{(t-i)^n} - \frac{(-1)^{n-1}}{(t+i)^n}\right).$$

  Scrierea sub formă trigonometrică şi calculele aferente. **(1p)**

- **5.** Aplicăm inegalitatea lui Cauchy şi obţinem:

$$\left(\int_0^1 \rho(t)\cos(r(t)dt\right)^2 + \left(\int_0^1 \rho(t)\sin(r(t))dt\right)^2 \le \int_0^1 \rho^2(t)dt$$

  (1p).
  Ţinem cont că $\rho^2 \le \rho$ şi obţinem inegalitatea dorită. **(1p)**

II. $z = \int_a^b f + i\int_a^b g = r(cos\theta + isin\theta), r \ge 0, \theta \in \mathbb{R}$ **(1p)**

$$r = \sqrt{\left(\int_a^b f\right)^2 + \left(\int_a^b g\right)^2} = \left(\int_a^b f + i\int_a^b g\right)(\cos\theta + i\sin(\theta))(\mathbf{2p})$$

$$= \int_a^b (f\cos\theta + g\sin\theta)(\mathbf{1p})$$

$$\le \int_a^b \sqrt{f^2+g^2}(\mathbf{2p})$$

Finalizare **(1p)**.

III.

- Demonstrează relaţia:

$$(x-y)(x^2+xy-y^2) = x^3+y^3+y.(\mathbf{6p})$$

- $x-y$ neinversabil implică x^3+y^3+y neinversabil. **(1p)**

IV.

- Verifica că $\mathcal{S}$ este inel. **(1p)**
- Exemple de divizori ai lui zero. **(1p)**
- Arată că este morfism **(1p)**.
- Arată că este surjectiv **(1p)**
- K_1 este mulţimea şirurilor constante, iar K_2 este mulţimea polinoamelor de grad cel mult unu. **(1p)**
- Arată că $\Delta^k x = (-1)^{n+k}2^k$(**2p**).