Universitatea de Vest Timişoara
Inspectoratul Şcolar Timiş

Timişoara, 26-28 martie 2010

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul "Traian Lalescu", Ediţia a XXIV-a

Enunţuri

Clasa a V-a

1. Trei surori, Alina, Bianca şi Cristina au pregătit trei coşuleţe (A, B şi, respectiv C) pentru iepuraş. Iepuraşul are 2010 bomboane pe care le pune, pe rând, în coşuleţe, astfel: o bomboană în coşuleţul A, 2 în B, 3 în C, 4 în B, 5 în A, 6 în B, 7 în C, şi tot aşa mai departe.

(a) În ce coşuleţ a pus iepuraşul ultimele bomboane ?

(b) Câte bomboane a primit fiecare dintre cele trei surori ?

(***)

2. Arătaţi că, pentru orice număr natural n, fracţia

$$\frac{8^{n+2} \cdot 125^n - 1}{8^n \cdot 125^{n+2} - 1}$$

este reductibilă.

Mircea Mario Stoica

3. (a) Să se arate că, pentru orice număr natural $n \geq 1$, are loc identitatea

$$3^n - 1 = 2 \cdot (1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}).$$

(b) Fie n un număr natural cu proprietatea că $3^n - 1$ este divizibil cu 16. Să se arate că n este multiplu de 4.

(c) Să se determine toate perechile (m, n) de numere naturale care verifică ecuaţia:

$$3^n = 1 + 2^m.$$

Dan Popovici

Timp de lucru: 2 ore

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică
Inspectoratul şcolar judeţean Timiş

Timişoara
26-28 martie 2010

Concursul interjudeţean de matematică
Memorialul "Traian Lalescu", Ediţia a XXIV-a

Subiecte propuse pentru

clasa a VI-a

1. a) Numerele naturale a, b, c, d, e şi f sunt proporţionale cu şase numere naturale consecutive şi au suma 84. Determinaţi ultima cifră a numărului $3^a + 3^b + 3^c + 3^d + 3^e + 3^f$.
b) Determinaţi ultimele două cifre ale numărului $N = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2009} + 3^{2010}$.

2. Fie n un număr natural care are în scrierea zecimală 27 de cifre. Dacă n_1 este suma cifrelor numărului $3 \cdot n$, iar n_2 este suma cifrelor numărului $3 \cdot n_1$, determinaţi suma cifrelor numărului n_2.

3. Fie $\Delta\, ABC$ un triunghi.
a) Arătaţi că bisectoarele interioare ale unghiurilor triunghiului se intersectează într-un punct I.
b) Arătaţi că bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{A}$ se intersectează cu bisectoarele exterioare ale unghiurilor $\widehat{B}$ şi $\widehat{C}$ într-un punct I_a.
c) Dacă I_b este punctul de intersecţie al bisectoarei interioare a unghiului $\widehat{B}$ cu bisectoarele exterioare ale unghiurilor $\widehat{A}$ şi $\widehat{C}$, iar I_c este punctul de intersecţie al bisectoarei interioare a unghiului $\widehat{C}$ cu bisectoarele exterioare ale unghiurilor $\widehat{A}$ şi $\widehat{B}$, atunci $II_a \perp I_bI_c$, $II_b \perp I_aI_c$ şi $II_c \perp I_aI_b$.

4. a) Arătaţi că pătratul unui produs de trei numere prime distincte are exact 27 de divizori naturali.
b) Arătaţi că un număr natural care are un număr impar de divizori naturali este un pătrat perfect.
c) Determinaţi toate numerele naturale mai mici decât 2010 care au exact 27 de divizori naturali.
(Se presupune cunoscut faptul că numărul $\tau(n)$ al divizorilor naturali ai numărului natural n, având descompunerea în factori primi $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$, este $\tau(n) = (a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_k + 1)$.)

Notă: Timp de lucru - 3 ore

Universitatea de Vest Timişoara
Inspectoratul Şcolar Timiş

Timişoara, 26-28 martie 2010

Concursul Interjudeţean de Matematică

Memorialul "Traian Lalescu", Ediţia a XXIV -a

Clasa a VII-a

SUBIECTE

Problema 1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia:

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\frac{1}{x-1}$$

Problema 2. Fie $x>0, x\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$. Demonstraţi că $x^x\notin\mathbb{Q}$.

Problema 3. În triunghiul ABC se cunoaşte: $m(\sphericalangle A)=90^\circ$ şi $m(\sphericalangle B)=30^\circ$. Să se găseasca raportul dintre lungimilor bisectoarelor interioare ale unghiurilor $\sphericalangle A$ şi $\sphericalangle B$.

Problema 4. Dacă lungimile laturilor unui triunghi ABC satisfac relaţia: $BC^2=AC^2+AC\cdot AB$ atunci $m(\sphericalangle A)=2m(\sphericalangle B)$.

Timp de lucru: 3 ore.

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Timiş

Timişoara, 26–28 Martie 2010

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu", Ediţia a XXIV-a

Enunţuri

Clasa a VIII-a

1. Fie triunghiul $\triangle ABC$ dreptunghic în A şi AD înălţimea sa cu $D \in (BC)$. Dacă notăm cu r_1 raza cercului înscris în triunghiul $\triangle ABD$ şi cu r_2 raza cercului înscris în triunghiul $\triangle ACD$, iar cu a notăm lungimea laturii BC, să se arate că

$$\frac{r_1 + r_2}{a} \le 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2. Să se determine cel mai mare număr natural $m \in \mathbb{N}$ pentru care are loc inegalitatea:

$$(x^2 + y^2)^3 \ge m\ (x^3 + y^3)^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

3. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile x, y, z şi diagonala $d = 26$. Dacă

$$6x + 8y + 24z = 676$$

şi

$$S = x^{2010} + y^{2010} + z^{2010}$$

să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiei: „ S este divizibil cu 2010".

4. Pentru fiecare număr raţional $a \in \mathbb{Q}^* \setminus \{\frac{1}{2}\}$ considerăm mulţimea

$$A_a := \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} = a\}.$$

Să se arate că:

(i) $E_1(x) = \frac{x^4}{x^8+x^4+1} \in \mathbb{Q}^*$, pentru orice $x \in A_a$;

(ii) există o infinitate de numere $a \in \mathbb{Q}^* \setminus \{\frac{1}{2}\}$ cu proprietatea că $E_2(x) = \frac{x^3}{x^6+x^3+1} \in \mathbb{Q}^*$, pentru orice $x \in A_a$.

Timp de lucru: 3 ore

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul "Traian Lalescu", Ediţia a XXIV-a

Barem de Corectare

Clasa a V-a

Problema 1.

(1 pt) Observă că în coşuleţul A sunt aşezate, pe rând, numere (de bomboane) de forma $4k+1$ ($k \in \mathbb{N}$), în B de forma $2k$ ($k \in \mathbb{N}$), iar în C de forma $4k-1$ ($k \in \mathbb{N}^*$).
(1 pt) Determină cel mai mare număr natural n pentru care $1+2+\cdots+n \leq 2010$ ($n = 62$).
(1 pt) Concluzionează că penultimul coşuleţ în care se pun bomboane este B (62 bomboane), iar ultimul este C cu $2010-(1+2+\cdots+62) = 57$ bomboane.
(1 pt) Calculează suma $1+5+9+\cdots+61$ (496 bomboane a primit Alina).
(1 pt) Calculează suma $2+4+6+\cdots+62$ (992 bomboane a primit Bianca).
(1 pt) Calculează suma $(3+7+11+\cdots+59)+57$ (522 bomboane a primit Cristina).
(1 pt) Din oficiu.

Problema 2.

(2 pt) Arată că $8^{n+2} \cdot 125^n - 1 = 63\underbrace{9\ldots9}_{\text{de } 3n \text{ ori}}$.
(0,5 pt) Observă că $8^{n+2} \cdot 125^n - 1$ este divizibil cu 9.
(2 pt) Arată că $8^n \cdot 125^{n+2} - 1 = 15624\underbrace{9\ldots9}_{\text{de } 3n \text{ ori}}$.
(0,5 pt) Observă că $8^n \cdot 125^{n+2} - 1$ este divizibil cu 9.
(1 pt) Concluzionează că fracţia este reductibilă.
(1 pt) Din oficiu.

Problema 3.

(a)

(0,5 pt) Scrie membrul drept al identităţii sub forma $3S - 2S$, unde $S = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}$.

(0,5 pt) Efectuează calculele şi deduce identitatea cerută.

(b)

(0,5 pt) Observă că suma S este divizibilă cu 8.
(0,5 pt) Deduce că n este un număr par.
(0,5 pt) Observă că $S = 4 \cdot (1 + 3^2 + 3^4 + \cdots + 3^{n-2})$.
(0,5 pt) Deduce că termenul din paranteză trebuie să fie un număr par.
(0,5 pt) Concluzionează că n este un multiplu de 4.

(c)

(1 pt) Observă că, dacă n este multiplu de 4, atunci $3^n - 1$ este divizibil cu 5.
(0,5 pt) Deduce (folosind (b)) că ecuaţia nu poate avea soluţii dacă $m \geq 4$.
(0,5 pt) Studiază cazurile $m \in \{0, 1, 2, 3\}$.
(0,5 pt) Obţine soluţia $\{(1, 1), (3, 2)\}$.

(1 pt) Din oficiu.

Barem de corectare la clasa a VI-a

1.

start	1p
a) scrie $\frac{a}{n} = \frac{b}{n+1} = \frac{c}{n+2} = \frac{d}{n+3} = \frac{e}{n+4} = \frac{f}{n+5} = k$ şi obţine $k(6n+15) = 84$	1p
arată că $k = b - a \in \mathbb{N}$	1p
deduce din $k(2n+5) = 28$ că $2n+5 \mid 28$	1p
cum $2n+5$ este impar şi $2n+5 \geq 5$, deduce $2n+5 = 7$,	1p
de unde află că $k = 4$, $n = 1$, $a = 4$, $b = 8$, $c = 12$, $d = 16$, $e = 20$, $f = 24$	1p
arată că $UC(3^4) = UC(3^8) = \ldots = UC(3^{24}) = 1$	1p
şi deduce că $UC(3^a + 3^b + 3^c + 3^d + 3^e + 3^f) = 6$	0,5p
b) grupează $N = 3 + 3^2 + (3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6) + \ldots + (3^{2007} + 3^{2008} + 3^{2009} + 3^{2010})$	1p
obţine că $N = 12 + 3^3 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3)(1 + 3^4 + 3^8 + \ldots + 3^{2004}) =$	
$= 12 + 27 \cdot 40 \cdot (\mathcal{M}10 + 2) = \mathcal{M}10800 + 2172$	1p
deduce că ultimele două cifre ale lui N sunt 72	0,5p
Total	**10p**

2.

start	1p
arată că $n < 10^{27}$, deci $3n < 3 \cdot 10^{27}$	2p
arată că $3 \mid n_1$ şi $n_1 < 2 + 27 \cdot 9 = 245$	2p
arată că $9 \mid n_2$ şi $n_2 < 7 + 2 \cdot 9 = 25$	2p
arată că $1 \leq s(n_2) \leq 10$ şi $9 \mid s(n_2)$	2p
deduce că $s(n_2) = 9$	1p
Total	**10p**

3.

start	1p
a) consideră I la intersecţia bisectoarelor unghiurilor $\widehat{A}$ şi $\widehat{B}$	1p
foloseşte proprietatea bisectoarei şi scrie $d(I, AC) = d(I, AB) = d(I, BC)$	1p
deduce că I aprţine şi bisectoarei unghiului $\widehat{C}$	1p
trage concluzia	1p
b) consideră I_a la intersecţia bisectoarei interioare a unghiului $\widehat{A}$	
cu bisectoarea exterioară a unghiului $\widehat{B}$	0,5p
scrie $d(I_a, AC) = d(I_a, AB) = d(I_a, BC)$	1p
finalizează	0,5p
c) arată că II_a este dreapta suport a bisectoarei interioare a unghiului $\widehat{A}$,	1p
iar I_bI_c este dreapta suport a bisectoarei exterioare a unghiului $\widehat{A}$	1p
deduce că $II_a \perp I_bI_c$ şi analoagele $II_b \perp I_aI_c$, $II_c \perp I_aI_b$	1p
Total	**10p**

4.

start	1p
a) scrie $n = (pqr)^2 = p^2q^2r^2$	0,5p
şi obţine $\tau(n) = (2+1) \cdot (2+1) \cdot (2+1) = 27$	0,5p
b) scrie $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$	0,5p
din $2 \nmid \tau(n) = (a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_k+1)$ deduce $2 \nmid (a_i+1)$, $(\forall) i = \overline{1,k}$,	1p
deci $2 \mid a_i$, $(\forall) i = \overline{1,k}$	0,5p
scrie $a_i = 2b_i$, $i = \overline{1,k}$ şi obţine $n = \left(p_1^{b_1} p_2^{b_2} \ldots p_k^{b_k}\right)^2$	1p
c) scrie $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$ şi $27 = \tau(n) = (a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_k+1)$	0,5p
deduce că $k = 3, a_1 = a_2 = a_3$ sau $k = 2, a_1 = 8, a_2 = 2$ sau $k = 1, a_1 = 26$	1p
arată că pentru $k = 2$, $n = p_1^8 p_2^2 \geq 2^8 3^2 > 2010$	0,5p
pentru $k = 1$, $n = p_1^{26} \geq 2^{26} > 2010$	0,5p
pentru $k = 3$, dacă $2 \nmid n$, atunci $n = p^2q^2r^2 \geq 3^2 5^2 7^2 / 2010$	0,5p
- dacă $3 \nmid n$, atunci $n = 2^2p^2q^2 \geq 2^2 5^2 7^2 > 2010$	0,5p
- dacă $(n, 5 \cdot 7) = 1$, atunci $n = 2^2 3^2 p^2 \geq 2^2 3^2 121$	0,5p
deduce că $n_1 = 2^2 3^2 5^2 = 900$ şi $n_2 = 2^2 3^2 7^2 = 1764$ sunt singurele soluţii	1p
Total	**10p**

Universitatea de Vest Timişoara
Inspectoratul Şcolar Timiş

Timişoara, 26-28 martie 2010

Concursul Interjudeţean de Matematică

Memorialul "Traian Lalescu", Ediţia a XXIV -a

Clasa a VII -a

BAREM

Problema 1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia:

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\frac{1}{x-1}$$

Soluţie

Start ... 1p

Condiţii de existentă a radicalilor şi a membrului drept: $x>1$ ... 1p

$x-2\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}-1)^2$ şi $x+2\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}+1)^2$ ... 1p

Ecuaţia devine :

$|\sqrt{x-1}-1|+|\sqrt{x-1}+1|=\dfrac{1}{x-1}$

$|\sqrt{x-1}-1|+\sqrt{x-1}+1=\dfrac{1}{x-1}$... 1p

Avem 2 cazuri:

i. $1<x<2$

Obţinem: $\dfrac{1}{x-1}=2\Rightarrow x=\dfrac{3}{2}\in(1,2)$ ... 1p

ii. $2\leq x$

Obţinem: $2\sqrt{x-1}=\dfrac{1}{x-1}\Leftrightarrow(\sqrt{x-1})^3=\dfrac{1}{2}$

care nu poate avea soluţie în intervalul $[2,\infty)$. ... 1p

Singura soluţie a ecuaţiei este $x=\dfrac{3}{2}$... 1p

Problema 2. Fie $x > 0, x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$. Demonstraţi că $x^x \notin \mathbb{Q}$.

Soluţie

Start ... 1p

Fie $x = \dfrac{a}{b}; a, b \in \mathbb{N}^*, (a, b) = 1$

Presupunem, prin reducere la absurd, că: $x^x \in \mathbb{Q}$. Mai precis,

presupunem că există $c, d \in \mathbb{N}^*$, $(c, d) = 1$ astfel încât $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = \dfrac{c}{d}$ ... 1p

Deducem: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^a = \left(\dfrac{c}{d}\right)^b \Leftrightarrow a^a \cdot d^b = c^b \cdot b^a$ $(*)$... 1p

Fie $p > 2$ un număr prim care apare în descompunerea

în factori primi a lui b, $b = p^r \cdot u$, $r \geq 1, r \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{N}^*$ ... 1p

Atunci $b^a = p^{ra} \cdot u^a$

Din $(*)$ deducem că p apare şi în membrul stâng

(ca factor al lui d) $d = p^s \cdot v \Rightarrow d^b = p^{sb} \cdot v^b$ ... 1p

Exponenţii la care apare p în cei doi membrii ai egalitatii $(*)$

trebuie să fie egali, prin urmare: $r \cdot a = s \cdot b$, b nu poate fi divizor a lui a,

deci $r \vdots b \Rightarrow r \geq b \geq p^r$ ceea ce este absurd... 1p

Deoarece pentru $p > 1$ are loc egalitatea: $p^r > r$.

Presupunerea facută este falsă deci $x^x \notin \mathbb{Q}$ ... 1p

Problema 3. În triunghiul ABC se cunoaşte: $m(\sphericalangle A) = 90°$ şi $m(\sphericalangle B) = 30°$. Să se găseasca raportul dintre lungimilor bisectoarelor interioare ale unghiurilor $\sphericalangle A$ şi $\sphericalangle B$.

Soluţie

Start ... 1p

Figura ... 1p

Fie $AD \perp BC$. Proiecţia lui A pe BC o notăm cu D. Avem: $m(\sphericalangle BAA') = 45°$

şi $m(\sphericalangle CAD') = 30°$... 1p

Rezultă $m(\sphericalangle DAA') = 15°$ şi cum $m(\sphericalangle ABB') = 15° \Rightarrow \Delta ABB' \backsim \Delta ADA'$... 2p

Avem $\dfrac{BB'}{AA'} = \dfrac{AB}{AD}$ Dar $AB = 2AD$ ... 2p

Rezultă: $\dfrac{BB'}{AA'} = 2$ ... 1p

Problema 4. Dacă lungimile laturilor unui triunghi ABC satisfac relaţia:
$BC^2 = AC^2 + AC \cdot AB$ atunci $m(\sphericalangle A) = 2m(\sphericalangle B)$.

Soluţie

Start ... 1p

Figura ... 1p

Pe semidreapta $(CA$ considerăm punctul D, $A \in (DC)$ cu proprietatea: $AB = AD$. Din egalitatea din enunţ deducem:

$\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{AC + AB}{BC}$ care arată că $\Delta ABC \sim \Delta BDC$... 2p

Prin urmare: $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle CBD)$... 1p

$m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle BDA) = m(\sphericalangle DBA)$... 1p

$m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle DBA) = 2m(\sphericalangle B)$... 1p

Universitatea de Vest din Timişoara — Timişoara, 26–28 Martie 2010
Inspectoratul Şcolar Timiş

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu“, Ediţia a XXIV-a

Bareme

Clasa a VIII-a

Problema 1

Start 1p

Notăm cu c lungimea laturii AB şi cu b lungimea laturii AC şi avem că $r_1 = \frac{AD+BD-AB}{2}$, $r_2 = \frac{AD+CD-AC}{2}, AD = \frac{bc}{a}$. Rezultă că $r_1 + r_2 = \frac{bc}{a} + \frac{a-b-c}{2} = \frac{(b+c)(b+c-a)}{2a}$ 4p

$(b+c)^2 \leq 2(b^2+c^2) = 2a^2 \Rightarrow b+c \leq a\sqrt{2} \Rightarrow r_1 + r_2 \leq \frac{a\sqrt{2}(a\sqrt{2}-a)}{2a} = a(1-\frac{1}{\sqrt{2}})$ 2p

Problema 2

Start 1p

Pentru $m = 0$ inegalitatea este evidentă 1p

Pentru $x = 1$ şi $y = 0$ (de exemplu) se observă că $m \leq 1$ 2p

Pentru $m = 1$ relaţia are loc pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. 3p

Problema 3

Start 1p

$6x + 8y + 24z = 676 = 26^2 = d^2$ 1p

$6x + 8y + 24z = x^2 + y^2 + z^2$ 1p

$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 24z = 0 \mid \cdot 2$ 0.5p

$x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 16y - 48z + 676 = 0$ 1p

$(x-6)^2 + (y-8)^2 + (z-24)^2 = 0$ 1p

$x = 6, y = 8, z = 24, S = 6^{2010} + 8^{2010} + 24^{2010}$ 0.5p

$10 \nmid S$, deci $2010 \nmid S$ şi astfel propoziţia este falsă. 1p

Problema 4

Start 1p

Dacă $x \in A_a$ atunci $\frac{1}{a} = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$, deci $x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{a} - 1$ 1p

(i) $\frac{1}{E_1(x)} = (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 - 1 = \frac{1-2a}{a^2}$, deci $E_1(x) = \frac{a^2}{1-2a} \in \mathbb{Q}^*$ 1p

(ii) $\frac{1}{E_2(x)} = (x + \frac{1}{x})^3 - 3(x + \frac{1}{x}) + 1$ 1p

$(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = \frac{1}{a} + 1$ 1p

E suficient să alegem $a = \frac{1}{k^2-1}, k \geq 2, k \in \mathbb{N}$ şi atunci $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$. 1p

Atunci $\frac{1}{E_2(x)} \in \mathbb{Q}$, deci $E_2(x) \in \mathbb{Q}^*$ 1p