Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul şcolar judeţean
Caraş-Severin

Concursul interjudeţean de matematică
"Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a,
Reşiţa, 25-27 martie 2011
Clasa a V-a

1. Aflaţi suma tuturor cifrelor care apar în scrierea numerelor 1, 2, 3, $\ldots, 10^n - 1$.
2. Arătaţi că nu există niciun număr natural care să se mărească de 7 sau de 9 ori prin mutarea primei cifre la sfârşit.
3. Arătaţi că, oricum am alege 7 numere naturale nenule distincte mai mici sau egale cu 126, printre ele se vor afla două astfel încât cel mai mare dintre ele să fie mai mic sau egal cu dublul celui mai mic.

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru efectiv 2 ore.*

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul şcolar judeţean
Caraş-Severin

Concursul interjudeţean de matematică

"Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a,
Reşiţa, 25-27 martie 2011
Barem de corectare pentru clasa a V-a

Subiectul 1.

- Oficiu 1p
- Adaugă 0 în şir 1p
- Grupează numerele în perechi de forma $(a, 10^n - 1 - a)$ 3p
- Observă că suma cifrelor din fiecare pereche este $9n$ 3p
- Calculează numărul perechilor ca fiind $\frac{10^n}{2}$ 1p
- Suma totală este $9n\frac{10^n}{2}$ 1p

Subiectul 2.

- Oficiu 1p
- În primul caz, prima cifră este 1 .... 0,75p
- Atunci $\overline{1xy\ldots zt} \cdot 7 = \overline{xy\ldots zt1}$, deci $t = 3$ 1p
- $\overline{1xy\ldots z3} \cdot 7 = \overline{xy\ldots z31}$, deci $z = 3$ 1p
- Toate cifrele numărului căutat sunt egale cu 3 .... 1,25p
- Prima cifră a numărului este 1, deci nu există astfel de numere .. 0,5p
- În cel de-al doilea caz prima cifră este 1 .... 0,75p
- Are loc $\overline{1xy\ldots zt} \cdot 9 = \overline{xy\ldots zt1}$, deci $t = 9$ 1p
- $\overline{1xy\ldots z9} \cdot 9 = \overline{xy\ldots z91}$, deci $z = 9$ 1p

- Toate cifrele numărului căutat sunt egale cu 9 .... 1,25p
- Prima cifră a numărului este 1, deci nu există astfel de numere .. 0,5p

Subiectul 3.

- Oficiu 1p
- Împarte mulţimea $\{1, 2, \ldots, 126\}$ în submulţimi disjuncte astfel încât fiecare element al unei submulţimi să fie de cel mult 2 ori mai mare ca oricare alt element al aceleiaşi submulţimi 4p
- Submulţimile căutate sunt $\{1, 2\}$, $\{3, 4, 5, 6\}$, $\{7, \ldots, 14\}$, $\{15, \ldots 30\}$, $\{31, \ldots, 62\}$, $\{63, \ldots, 126\}$ 3p
- Oricum am alege 7 numere din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 126\}$, cel puţin două vor fi în aceeaşi submulţime 2p

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul şcolar judeţean
Caraş-Severin

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a,

Reşiţa, 25-27 martie 2011

Clasa a VI-a

1. Arătaţi că nu există nici un număr natural care să se mărească de 2, 5, 6 sau 8 ori prin mutarea primei cifre la sfârşitul numărului.

2. **a)** Determinaţi numerele strict pozitive a şi b astfel încât
$$a^n + b^n = a^{n+1} + b^{n+1} = a^{n+2} + b^{n+2},$$
pentru un număr natural $n \geq 2$ fixat.

   b) Dacă a, b şi c sunt numere naturale avându-l pe 1 drept cel mai mare divizor comun şi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, arătaţi că $a + b$, $a - c$ şi $b - c$ sunt pătrate perfecte.

3. Fie $\widehat{POQ}$ un unghi ascuţit şi $B \in (OQ$. Construim din B o perpendiculară pe OP care intersectează această dreaptă în A. Punctul C este ales astfel încât triunghiul ABC să fie echilateral, iar O şi C să nu fie de aceeaşi parte a dreptei AB. Fie D simetricul lui C faţă de OP şi $M \in (OQ$ astfel încât $[OC] \equiv [OM]$. Ştiind că $m(\widehat{POC}) = \frac{1}{3} m(\widehat{POQ})$,

   a) arătaţi că $[AD] \equiv [CM]$;

   b) calculaţi $m(\widehat{POQ})$.

4. Un gardian deschide pe rând toate celulele unei închisori, care sunt aşezate în linie dreaptă. Apoi, el închide celulele cu numarul 2, 4, 6 ş. a. m. d. După aceea, luând celulele din 3 în 3, răsuceşte cheia în broasca acestor celule, închizându-le pe cele deschise şi deschizându-le pe cele închise. El continuă în acest fel, la pasul i luând celulele i, $2i$, $3i$, ..., şi răsucind cheia în broasca lor. Deţinutii ale căror celule au rămas deschise după efectuarea tuturor operaţiilor posibile de acest fel sunt puşi în libertate.

   Să se arate că deţinuţii eliberaţi vor fi cei din celulele având numărul de ordine un pătrat perfect. (Fiecare operaţie începe din dreptul primei celule.)

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru efectiv 3 ore.*

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul şcolar judeţean
Caraş-Severin

Concursul interjudeţean de matematică

"Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a,
Reşiţa, 25-27 martie 2011
Barem de corectare pentru clasa a VI-a

Subiectul 1.

- Oficiu 1p
- Arată că prima cifră poate fi doar 1, dar prin mutarea acesteia la sfârşitul numărului, acesta nu este multiplu de 5, deci nu există astfel de numere 1p
- Arată că prima cifră poate fi doar 1, dar prin mutarea acesteia la sfârşitul numărului, acesta nu este multiplu de 6, deci nu există astfel de numere 1p
- Arată că prima cifră poate fi doar 1, dar prin mutarea acesteia la sfârşitul numărului, acesta nu este multiplu de 8, deci nu există astfel de numere 1p
- În cazul numărului care se dublează, prima cifră este 2 sau 4 ...... 1p
- Dacă prima cifră este 2, atunci $\overline{2xy\ldots zt}\cdot 2=\overline{xy\ldots zt2}$ şi t este 1 sau 6 .... 1p
- Dacă $t=1$, atunci $\overline{2xy\ldots z1}$ este impar, iar $\overline{xy\ldots z12}$ este multiplu de 4, contradicţie 0,75p
- Dacă $t=6$, atunci $\overline{2xy\ldots z6}\cdot 2=M_4$, iar $\overline{xy\ldots 62}\neq M_4$, contradicţie 0,75p
- Dacă prima cifră este 4, atunci $\overline{4xy\ldots zt}\cdot 2=\overline{xy\ldots zt4}$, deci t este 2 sau 7 .... 1p

- Dacă $t = 2$, $\overline{4xy\dots z2} \cdot 2 = \overline{xy\dots z24}$ şi z este 1 sau 6. În primul caz, $\overline{4xy\dots 12} \cdot 2 = M_8$ şi $\overline{xy\dots 124} \neq M_8$. În al doilea caz, $\overline{4xy\dots 62} \cdot 2 \neq M_8$ şi $\overline{xy\dots 624} = M_8$ 0,75p

- Dacă $t = 7$, $\overline{4xy\dots z7} \cdot 2 = \overline{xy\dots z74}$ şi z este 3 sau 8. Arată că în ambele cazuri nu există astfel de numere 0,75p

Subiectul 2.

- Oficiu 1p

- a) Observă că $a^{n+2} + b^{n+2} = (a+b)(a^{n+1} + b^{n+1}) - ab(a^n + b^n)$ ... 1p

- Notează $x = a^n + b^n$ şi observă că $x = (a+b)x - abx$, deci $(a-1)(b-1) = 0$ 1p

- Dacă $a = 1$, atunci $b = 1$ şi invers 1p

- b) Arată că a, b, c - distincte.....................................1p

- Presupune $a > b > c \Rightarrow \dfrac{3}{a} < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} < \dfrac{3}{c} \Rightarrow c < 3$ 1p

- $c = 1$ nu convine 0,5p

- Pentru $c = 2$ rezultă $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{2}$. Atunci $\dfrac{2}{a} < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} < \dfrac{2}{b}$, de unde $b = 3$, deci $a = 6$ 2,5p

- Soluţia $a = 6$, $b = 3$, $c = 2$ verifică condiţia problemei.............1p

Subiectul 3.

- Oficiu 1p

- Figura 1p

- a) ΔADC este echilateral, $\Delta ADC \equiv \Delta ABC$ şi $[AD] \equiv [DC] \equiv [AC] \equiv [AB] \equiv [CB]$ (1) 1p

- ΔDOC este isoscel şi $m(\widehat{DOC}) = 2x$, unde $x = m(\widehat{POC})$ 1p

- $\Delta DOC \equiv \Delta MOC$, deci $[DC] \equiv [CM]$ (2) 1p

- Din (1), (2) rezultă că $[AD] \equiv [CM]$ 0,5p
- b) $[CB] \equiv [CM]$, deci $m(\widehat{CBM}) = m(\widehat{CMB})$ (3) 1p
- $m(\widehat{CMB}) = m(\widehat{OCM}) = \frac{180^\circ - 2x}{2} = 90^\circ - x$ (4) 1p
- $\widehat{CBM}$ este exterior ΔOBC, deci $m(\widehat{CBM}) = 30^\circ + 3x$ (5) 1,5p
- Din (3), (4) şi (5) rezultă că $x = 15^\circ$, deci $m(\widehat{POQ}) = 45^\circ$ 1p

Subiectul 4.

- Oficiu 1p
- Celula q a fost închisă şi deschisă în total de m ori, unde m este numărul divizorilor lui q 3p
- Celula q rămâne deschisă dacă m este un număr impar 2p
- Un număr are numărul divizorilor impar dacă şi numai dacă este pătrat perfect 3p
- Finalizare 1p

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul şcolar judeţean
Caraş-Severin

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a, Reşiţa, 25-27 martie 2011

Subiecte pentru clasa a VII-a

1. Arătaţi că numărul $\sqrt{26}+\sqrt{3}+\sqrt{2011}$ este iraţional.

2. Fie $\Delta\, ABC$ un triunghi ascuţitunghic, I centrul cercului său înscris, iar $R \in (BC)$ un punct cu proprietatea că $\widehat{ARB} \equiv \widehat{IRC}$. Arătaţi că

$$AR \cdot BC = IR \cdot (AB + AC + BC)\,.$$

3. a) Arătaţi că ecuaţia $x^2 + y^2 = 2011$ nu admite soluţii în mulţimea numerelor întregi.
b) Care dintre ecuaţiile $x^2 + 2011^2 = y^2$ şi $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2011}$ are mai multe soluţii în mulţimea numerelor întregi? Justificaţi.

4. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, iar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ puncte în plan, necoliniare câte trei. Unele dintre puncte sunt unite prin segmente. Notăm cu s_i numărul de segmente având un capăt în punctul A_i. Arătaţi că există două puncte A_i şi A_j, astfel încât $s_i = s_j$.

Notă: Timp de lucru - 3 ore

Concursul interjudeţean de matematică
"Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a,
Reşiţa, 25-27 martie 2011

Barem de corectare a soluţiilor la clasa a VII-a

1.

start	$1\,p$
notează $\sqrt{26}+\sqrt{3}+\sqrt{2011}=r$ şi presupune $r\in\mathbb{Q}$	$1\,p$
scrie $r-\sqrt{2011}=\sqrt{26}+\sqrt{3}$	$2\,p$
ridică la pătrat şi obţine că $r\sqrt{2011}+\sqrt{78}=\frac{r^2+1982}{2}\in\mathbb{Q}$	$3\,p$
ridică la pătrat şi obţine că $2r\sqrt{78\cdot 2011}\in\mathbb{Q}$	$1\,p$
deduce că $\sqrt{26\cdot 3\cdot 2011}\in\mathbb{Q}$, contradicţie	$1\,p$
obţine că $\sqrt{26}+\sqrt{3}+\sqrt{2011}\notin\mathbb{Q}$	$1\,p$
Total	**10 p**

2.

start	$1\,p$
duce $AA_1\perp BC$, $II_1\perp BC$, cu $A_1,I_1\in(BC)$	$1\,p$
arată că $\Delta\,AA_1R\sim\Delta\,II_1R$	$1\,p$
deduce că $\frac{AR}{IR}=\frac{AA_1}{II_1}$ (1)	$1\,p$
folosind $AA_1\parallel II_1$ deduce că $\Delta\,AA_1P\sim\Delta\,II_1P$, unde $P\in(BC)\cap AI$	$1\,p$
obţine că $\frac{AA_1}{II_1}=\frac{AP}{IP}$ (2)	$1\,p$
cu teorema bisectoarei în $\Delta\,ABC$ obţine $\frac{AB}{BP}=\frac{AB+AC}{BC}$ (3)	$1\,p$
cu teorema bisectoarei în $\Delta\,ABP$ obţine $\frac{AP}{IP}=\frac{AB+BP}{BP}$ (4)	$1\,p$
din $(1)-(4)$ obţine concluzia	$2\,p$
Total	**10 p**

3.

start	$1\,p$
a) arată că $a^2\in 4\mathbb{Z}\cup 4\mathbb{Z}+1$, $(\forall)a\in\mathbb{Z}$	$1\,p$
deduce că $x^2+y^2\in\mathbb{Z}\setminus(4\mathbb{Z}+3)$	$1\,p$
arată că $2011\in 4\mathbb{Z}+3$ şi trage concluzia	$1\,p$
b) pentru ecuaţia $x^2+2011^2=y^2$ observă că	
$(x,y)-$soluţie $\Longrightarrow(\pm x,\pm y)-$soluţii	$0,5\,p$
pentru $(x,y)\in\mathbb{N}$ transcrie $(y-x)(y+x)=2011^2$	$0,5\,p$
obţine că $(y-x,y+x)\in\{(1,2011^2),(2011,2011)\}$	$0,5\,p$
deduce că $(x,y)\in\left\{\left(\pm\frac{2011^2-1}{2},\pm\frac{2011^2+1}{2}\right),(0,\pm 2011)\right\}$	$1\,p$
pentru $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2011}$ transcrie echivalent	
$xy=2011(x+y),\ x,y\neq 0\Longleftrightarrow(x-2011)(y-2011)=2011^2$	$1\,p$
obţine că $(x-2011,y-2011)\in\{\pm(1,2011^2),\pm(2011^2,1),(2011,2011)\}$	$0,5\,p$
deduce că $(x,y)\in\{(2012,2011\cdot 2012),(2010,-2010\cdot 2011),$	
$(2011\cdot 2012,2012),(-2010\cdot 2011,2010),(4022,4022)\}$	$1\,p$
trage concluzia: prima ecuaţie are 6 soluţii $>$ 5 soluţii pentru a doua ecuaţie	$1\,p$
Total	**10 p**

4.

start	$1\,p$
observă că $s_i\in\{0,1,\ldots,n-1\},(\forall)i=\overline{1,n}$	$1\,p$
<u>caz 1</u> $(\exists)i_0:s_{i_0}=0\Longrightarrow s_i\in\{0,1,\ldots,n-2\},(\forall)i=\overline{1,n}$	$3\,p$
aplică principiul lui Dirichlet şi trage concluzia	$1\,p$
<u>caz 2</u> $s_i\neq 0,\ (\forall)i=\overline{1,n}\Longrightarrow s_i\in\{1,2\ldots,n-1\},(\forall)i=\overline{1,n}$	$3\,p$
aplică principiul lui Dirichlet şi trage concluzia	$1\,p$
Total	**10 p**

Universitatea de Vest din Timişoara — **Inspectoratul Şcolar Judeţean**
Facultatea de Matematică şi Informatică — **Caraş-Severin**

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a, Reşiţa, 25-27 martie 2011

Subiecte pentru clasa a VIII-a

1. Fie a, b, c trei numere reale mai mari sau egale decât -2, având suma nulă. Arătaţi că $a^3 + b^3 + c^3 \geq -6$.

2. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ se notează cu M şi N centrele feţelor $A'B'C'D'$ şi $ADD'A'$. Arătaţi că dacă $AM \perp A'C$ şi $C'N \perp BD'$, atunci paralelipipedul este cub.

3. Arătaţi că un pentagon convex cu toate unghiurile egale şi trei dintre laturi congruente este regulat.

4. a) Fie $OABC$ un tetraedru tridreptunghic ($OA \perp OB \perp OC \perp OA$). Se notează $OA = p, OB = q, OC = r$ şi cu d distanţa de la punctul O la planul (ABC). Arătaţi că are loc egalitatea:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2}.$$

b) Fie $a, b, c > 0$. Să se determine o soluţie a ecuaţiei

$$\sqrt{(b+c)(b-x)(c-x)} + \sqrt{(c+a)(c-x)(a-x)} + \sqrt{(a+b)(a-x)(b-x)} = \sqrt{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

Notă. Timp de lucru - 3 ore.

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Caraş-Severin

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul "Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a,
Reşiţa, 25-27 martie 2011
Clasa a VIII-a - Barem orientativ de corectare

Problema 1. Start ... 1p
Scrie $(a-1)^2(a+2) \geq 0$ ... 3p
Obţine $a^3 - 3a + 2 \geq 0$ ... 3p
Scrie inegalităţile analoage pentru b şi c, apoi însumează şi obţine concluzia ... 3p

Problema 2. Start ... 1p
(Observă că punctele A, M, A', C, respectiv C', N, B, D' sunt coplanare ... 2p)
Scrie de două ori, în mod corespunzător, condiţia de patrulater ortodiagonal ... 2p (4p)
Face calculele şi obţine două egalităţi între lungimile muchiilor paralelipipedului, mai exact $x^2 + y^2 = 2z^2$ si $y^2 + z^2 = 2x^2$, unde $AB = x, BC = y, AA' = z$ ... 4p
Deduce din aceste egalităţi că paralelipipedul este cub ... 1p

Problema 3. Start ... 1p
Precizează că distingem două cazuri: cele trei laturi congruente sunt consecutive sau nu ... 1p
În primul caz ($AB = BC = CD$) deduce mai întâi că $DE = AE$ ... 2p
Deduce apoi că $AB = AE$ şi trage concluzia că $ABCDE$ este pentagon regulat ... 3p
Tratează complet (în acelaşi mod) cazul al doilea ... 3p

Problema 4. Start ... 1p
a) Fie H proiectia lui O pe (ABC) si D proiectia lui O pe BC. Calculeaza pe d ca inaltime in triunghiul dreptunghic OAD si obtine egalitatea din enunt ... 3p
b) Alege un triedru de muchii $OA = \sqrt{a}, OB = \sqrt{b}, OC = \sqrt{c}$ ... 1p
Obtine $AH = \sqrt{a - d^2}$ si analoagele; obtine $BC = \sqrt{b + c}$ si analoagele ... 1p
Obtine $BH \cdot CH \cdot BC + CH \cdot AH \cdot CA + AH \cdot BH \cdot AB =$
$\sqrt{(b+c)(b-d^2)(c-d^2)} + \sqrt{(c+a)(c-d^2)(a-d^2)} + \sqrt{(a+b)(a-d^2)(b-d^2)}$ ... 1p
Arata ca $BH \cdot CH \cdot BC + CH \cdot AH \cdot CA + AH \cdot BH \cdot AB = BC \cdot CA \cdot AB = \sqrt{(b+c)(c+a)(a+b)}$ ... 2p
Folosind punctul a) obtine pentru ecuatie solutia $x = \frac{abc}{bc+ca+ab}$ ... 1p