Inspectoratul şcolar judeţean Timiş

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică ”Traian Lalescu”
Ediţia a XXVIII-a
Timişoara, 21-23 martie 2014

clasa a IX-a

1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale. Ştiind că $a_1 = 0,\ a_2 = 1$ şi că orice 3 termeni consecutivi a_n, a_{n+1}, a_{n+2} ai şirului sunt în progresie aritmetică pentru n impar, respectiv în progresie geometrică pentru n par, demonstraţi că
$$a_{2n} = n^2 \qquad \forall n \in \mathbf{N}^* \ .$$

2. Se consideră numerele reale x, y, z care satisfac relaţiile
$$|x| \leq \{y\} \leq [z] \ .$$
a) Demonstraţi că $x + z \geq 0$.
b) Dacă $x + z = 0$, determinaţi x, y, z.

3. Demonstraţi că pentru orice numere reale x, y, z are loc inegalitatea
$$x^2 + \frac{1}{3}y^2 + z^2 \geq x(y + z)$$
şi precizaţi în ce caz are loc egalitatea.

4. Fie $ABCD$ un patrulater, M mijlocul laturii $[BC]$, N mijlocul laturii $[CD]$ şi $\{P\} = AM \cap BN$. Notăm
$$m = \frac{PM}{AM} \ , \qquad n = \frac{BP}{BN} \ .$$
Demonstraţi că patrulaterul $ABCD$ este un paralelogram dacă şi numai dacă
$$n = 2m = \frac{2}{5} \ .$$

Subiect propus de conf.dr. Gheorghe Silberberg

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt punctate cu note cuprinse între 1 şi 10.
Timp de lucru - 3 ore

Succes!

Inspectoratul şcolar judeţean Timiş

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică ”Traian Lalescu”
Ediţia a XXVIII-a
Timişoara, 21-23 martie 2014

clasa a X-a

1. Fie $r > 0$ un număr real pozitiv, $a, b, c \in \mathbb{C}$ numere complexe distincte cu proprietatea că $|a| = |b| = |c| = r$, iar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ numere reale oarecare cu proprietatea că $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Arătaţi că

$$|\alpha a + \beta b + \gamma c| = r \Longleftrightarrow \alpha\beta|a-b|^2 + \alpha\gamma|a-c|^2 + \beta\gamma|b-c|^2 = 0\,.$$

2. Fie ε o rădăcină primitivă de ordinul 2014 a unităţii, iar $u, v \in \mathbb{C}$ numerele complexe date de

$$u = 1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \ldots + 2014\varepsilon^{2013},$$
$$v = 1^2 + 2^2\varepsilon + 3^2\varepsilon^2 + \ldots + 2014^2\varepsilon^{2013}.$$

a) Arătaţi că $u, v \neq 0$.
b) Stabiliţi valorile minime şi maxime pe care le pot avea modulele numerelor u, respectiv v.

3. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie care verifică relaţia

$$x + y \leq 3^x f(x) + 3^y f(y) \leq (x+y)3^{x+y} \quad , (\forall)x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Arătaţi că funcţia f este unică şi determinaţi această funcţie.
b) Determinaţi $min(f(\mathbb{N}))$ şi $max(f(\mathbb{N}))$.
c) Arătaţi că $max(f(\mathbb{R})) = max(f([0,2])$.

4. Determinaţi numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$3^{x^{22}} = 2014 - 28^{(1-x)^2}\,.$$

Subiect propus de lect.dr. Mihai Chiş

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt punctate cu note cuprinse între 1 şi 10.
Timp de lucru - 3 ore

Succes!

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXVIII-a
Timişoara, 21-23 martie 2014

clasa a XI-a

1. Fie funcţia $F : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ dată prin relaţia

$$F(X,Y) = XY - YX, \quad (\forall)X, Y \in M_n(\mathbb{R}).$$

(a) Studiaţi injectivitatea funcţiei F.

(b) Fie $M \in \mathrm{Im}(F)$ o matrice fixată. Arătaţi că există $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, inversabile, astfel încât $M = F(A,B)$.

2. Studiaţi dacă există funcţii continue $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, care verifică echivalenţa

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow f(2014 \cdot x) \neq 0.$$

3. Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversabilă şi $B, C \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ astfel încât $C^T A^{-1} B \neq 0$. Arătaţi că ecuaţia în necunoscuta $x \in \mathbb{R}$

$$\det(A - xBC^T) = 0,$$

are o singură soluţie, $x = (C^T A^{-1} B)^{-1}$.

4. Fie a, b două numere reale oarecare, iar şirurile $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$ definite prin $a_1 = a$, $b_1 = b$ şi

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n^2 - \dfrac{b_n^2}{n^2}\right), & (\forall)n \geq 1, \\ b_{n+1} = -\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) a_n b_n, & (\forall)n \geq 1. \end{cases}$$

Studiaţi convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \dfrac{a_n \cdot b_n}{n}$, $(\forall)n \geq 1$ şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Subiect propus de conf.dr. Răzvan Tudoran

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt punctate cu note cuprinse între 1 şi 10.
Timp de lucru - 3 ore

Succes!

Inspectoratul şcolar judeţean Timiş

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXVIII-a
Timişoara, 21-23 martie 2014

clasa a XII-a

1. Fie $(G, \cdot)$ un grup multiplicativ cu elementul unitate u, cu proprietatea că pentru orice elemente $a, b \in G$ au loc egalităţile $(aba^{-1})^{22} = b^{22}$ şi $(aba^{-1})^3 = b^3$.
a) Arătaţi că grupul G este comutativ.
b) Dacă există elemente $x, y, z \in G \setminus \{u\}$ care verifică egalităţile $x^{22} = x^3$, $y^{28} = y^{81}$, respectiv $z^{21} = z^{23}$, arătaţi că există $t \in G \setminus \{u\}$ cu proprietatea că $t^{2014} = u$ şi $t^k \neq u$, $(\forall) k = \overline{1, 2013}$.

2. Fie $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că

$$xf(y) + yf(x) \leq 1 \quad , (\forall) x, y \in [0, 1].$$

a) Demonstraţi că $\int_0^1 f(x)\, dx \leq \frac{\pi}{4}$.
b) Construiţi o funcţie cu proprietatea din enunţ, astfel încât $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{\pi}{4}$.

3. Funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ este indefinit derivabilă şi are proprietatea că există $C > 0$ astfel încât expresia $E(x, n) = \frac{f^{(n)}(x)}{n+x+C}$ nu depinde de n, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ şi $x \in \mathbb{R}$, pentru care $n+x+C \neq 0$. Dacă $f'(0) = 1$ şi $\int_0^1 f(x)\, dx = C + e - 2$, determinaţi valoarea lui C.

4. Fie $(R, +, \cdot)$ un inel, iar $f : R \longrightarrow R$ o funcţie care verifică condiţiile:
i) f este surjectivă;
ii) $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $(\forall) x, y \in R$;
iii) $x^2 - f(x) \in Z(R)$.
($Z(R) = \{a \in R | ax = xa, (\forall) x \in R\}$ este centrul inelului R). Arătaţi că
a) $xy + yx \in Z(R)$, $(\forall) x, y \in R$;
b) inelul R este comutativ.

Subiect propus de conf.dr. Silviu Birăuaş

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt punctate cu note cuprinse între 1 şi 10.
Timp de lucru - 3 ore

Succes!

Universitatea de Vest din Timişoara | Inspectoratul Şcolar
Facultatea de Matematică şi Informatică | Judeţean Timiş

Concursul Interjudeţean de Matematică "Traian Lalescu", ediţia a XXVIII-a Timişoara, 21-23 martie 2014

Clasa a IX-a

Soluţii şi barem:

1. Prima soluţie: Utilizăm inducţia "cu dublă ipoteză".
Calculăm întâi $a_3 = 2a_2 - a_1 = 2$ şi $a_4 = \frac{a_3^2}{a_2} = 4$. (2 puncte)
Presupunem că pentru $k \in \mathbf{N}^*$ avem $a_{2k} = k^2$ şi $a_{2k+2} = (k+1)^2$. Termenul a_{2k+1} este media geometrică a acestora, adică

$$a_{2k+1} = \sqrt{a_{2k}a_{2k+2}} = \sqrt{k^2(k+1)^2} = k(k+1)\ . \text{ (2 puncte)}$$

Termenii $a_{2k+1}, a_{2k+2}, a_{2k+3}$ sunt în progresie aritmetică, deci

$$a_{2k+3} = 2a_{2k+2} - a_{2k+1} = 2(k+1)^2 - k(k+1) = (k+1)(k+2)\ . \text{ (2 puncte)}$$

Termenii $a_{2k+2}, a_{2k+3}, a_{2k+4}$ sunt în progresie geometrică, deci

$$a_{2k+4} = \frac{a_{2k+3}^2}{a_{2k+2}} = \frac{[(k+1)(k+2)]^2}{(k+1)^2} = (k+2)^2\ . \text{ (2 puncte)}$$

Am demonstrat astfel că $a_2 = 1^2,\ a_4 = 2^2$ şi că implicaţia

$$a_{2k} = k^2 \quad \text{şi} \quad a_{2(k+1)} = (k+1)^2 \Rightarrow a_{2(k+2)} = (k+2)^2\ ,$$

e valabilă pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$. Inducţia este încheiată şi rezultă
$a_{2n} = n^2\ \forall n \in \mathbf{N}^*$. (1 punct)

Soluţia a 2-a: Demonstrăm prin inducţie că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ propoziţia

$$\text{P(n)}: \qquad a_{2n-1} = n(n-1) \quad \text{şi} \quad a_{2n} = n^2$$

este adevărată.
Conform cu ipotezele $a_1 = 0$ şi $a_2 = 1$, $P(1)$ se verifică. (3 puncte)
Presupunem acum că $P(k)$ este adevărată pentru o valoare $k \in \mathbf{N}^*$. Avem

$$a_{2k+1} = 2a_{2k} - a_{2k-1} = 2k^2 - k(k-1) = k(k+1)$$

şi, în consecinţă

$$a_{2k+2} = \frac{a_{2k+1}^2}{a_{2k}} = \frac{[k(k+1)]^2}{k^2} = (k+1)^2\ ,$$

deci şi $P(k+1)$ este adevărată. (5 puncte)
Inducţia este încheiată. Rezultă că $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$. (1 punct)

2. a) Putem scrie

$$|x| \leq [z] \leq z = -x + (x+z) \leq |-x| + (x+z) = |x| + (x+z) \ .$$

Rezultă $x + z \geq 0$. (3 puncte)
b) Dacă $x + z = 0$, atunci toate inegalităţile de mai sus devin egalităţi, adică

$$|x| = [z] = z = -x \ ,$$

de unde rezultă $z \in \mathbf{N}$ şi $x = -z$. (2 puncte)
Inegalităţile din enunţ devin

$$z \leq \{y\} \leq [z] = z \ ,$$

deci $z = \{y\} \in \mathbf{N} \cap [0,1) = \{0\}$. Obţinem $x = z = 0$ şi $y \in \mathbf{Z}$. (2 puncte)
Reciproc, dacă $x = z = 0$ şi $y \in \mathbf{Z}$ relaţiile din enunţ sunt satisfăcute. (2 puncte)

3. Prima soluţie: Inegalitatea din enunţ se mai poate scrie sub forma

$$\left(z - \frac{x}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{3} - \frac{x}{2}\right)^2 \geq 0 \ ,$$

evident adevărată. (6 puncte)
Egalitatea are loc pentru x arbitrar, $y = \frac{3x}{2}$, $z = \frac{x}{2}$, adică pentru toate tripletele de numere reale proporţionale cu $\left(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. (3 puncte)

A doua soluţie: Pentru $x = 0$ inegalitatea se reduce la

$$\frac{1}{3}y^2 + z^2 \geq 0 \ ,$$

egalitatea având loc pentru $y = z = 0 (= x)$. (1 punct)
Dacă $x \neq 0$, împărţind la x^2 inegalitatea din enunţ şi notând $\frac{y}{x} = a$, $\frac{z}{x} = b$ rămâne să demonstrăm că

$$1 + \frac{1}{3}a^2 + b^2 \geq a + b \ ,$$

ceea ce se reduce la

$$\frac{1}{3}\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \ . \text{ (5 puncte)}$$

Egalitatea are loc pentru $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{1}{2}$. (1 punct)
Revenind la substituţie şi adăugând şi cazul trivial ($x = y = z = 0$), rezultă că egalitatea are loc dacă şi numai dacă tripletul (x, y, z) este proporţional cu tripletul $\left(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. (2 punct)

4. Din ipoteza $\frac{PM}{AM} = m$ obţinem $\frac{AP}{PM} = \frac{1-m}{m}$ (1 punct) şi deci

$$\overrightarrow{BP} = \frac{\overrightarrow{BA} + \frac{1-m}{m}\overrightarrow{BM}}{1 + \frac{1-m}{m}} = m\overrightarrow{BA} + (1-m)\overrightarrow{BM} = m\overrightarrow{BA} + \frac{1-m}{2}\overrightarrow{BC} \text{ (2 puncte)}$$

Pe de altă parte,

$$\overrightarrow{BN} = \frac{\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}}{2} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}}{2}\ .\ \text{(1 punct)}$$

Ipoteza $\frac{BP}{BN} = n$ devine

$$m\overrightarrow{BA} + \frac{1-m}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{n}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{n}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{n}{2}\overrightarrow{BC} \quad (*)$$

Dacă patrulaterul este paralelogram, atunci $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ şi relaţia $(*)$ se transformă în

$$\left(m - \frac{n}{2}\right)\overrightarrow{BA} = \left(n - \frac{1-m}{2}\right)\overrightarrow{BC}\ .\ \text{(1 punct)}$$

m şi n trebuie să satisfacă sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} m - \frac{n}{2} & = & 0 \\ n - \frac{1-m}{2} & = & 0 \end{cases}$$

de unde rezultă $m = \frac{1}{5},\ n = \frac{2}{5}$. (1 punct)
Reciproc, dacă introducem valorile $m = \frac{1}{5},\ n = \frac{2}{5}$ în relaţia $(*)$ obţinem $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ şi deci patrulaterul $ABCD$ este un paralelogram. (3 puncte)

Inspectoratul şcolar judeţean Timiş

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXVIII-a
Timişoara, 21-23 martie 2014

clasa a X-a

1. Fie $r > 0$ un număr real pozitiv, $a, b, c \in \mathbb{C}$ numere complexe distincte cu proprietatea că $|a| = |b| = |c| = r$, iar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ numere reale oarecare cu proprietatea că $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Arătaţi că

$$|\alpha a + \beta b + \gamma c| = r \Longleftrightarrow \alpha\beta|a - b|^2 + \alpha\gamma|a - c|^2 + \beta\gamma|b - c|^2 = 0\,.$$

Barem de corectare:

start	1p
scrie echivalent $\lvert\alpha a + \beta b + \gamma c\rvert = r \Longleftrightarrow (\alpha a + \beta b + \gamma c)(\alpha \overline{a} + \beta \overline{b} + \gamma \overline{c}) = r^2$	2p
$\Longleftrightarrow (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)r^2 + \sum \alpha\beta(a\overline{b} + \overline{a}b) = r^2$	2p
$\Longleftrightarrow \sum \alpha\beta(2r^2 - a\overline{b} - \overline{a}b) = 0$	3p
$\Longleftrightarrow \sum \alpha\beta\lvert a - b\rvert^2 = 0$	2p
total	**10p**

2. Fie ε o rădăcină primitivă de ordinul 2014 a unităţii, iar $u, v \in \mathbb{C}$ numerele complexe date de

$$u = 1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \ldots + 2014\varepsilon^{2013},$$
$$v = 1^2 + 2^2\varepsilon + 3^2\varepsilon^2 + \ldots + 2014^2\varepsilon^{2013}.$$

a) Arătaţi că $u, v \neq 0$.
b) Stabiliţi valorile minime şi maxime pe care le pot avea modulele numerelor u, respectiv v.

Barem de corectare:

start	1p
arată că $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$	
şi obţine că $u = \frac{2014}{\varepsilon - 1} \neq 0$	2p
arată că $1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots + n^2x^{n-1} = \frac{n(n+1)x^{n+1}(x-1) - n(n+3)x^n(x-1) + x^n - 1}{(x-1)^3}$	
şi obţine că $v = \frac{2014 \cdot 2015 \cdot (\varepsilon - 1) - 2 \cdot 2014}{(\varepsilon - 1)^2}$	3p
deoarece $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, rezultă că $2015(\varepsilon - 1) - 2 \neq 0$, şi $v \neq 0$	1p
obţine $\lvert u\rvert = \frac{1007}{\lvert sin \frac{k\pi}{2014}}$, cu $max\lvert u\rvert = \frac{1007}{sin \frac{\pi}{2014}}$ şi $min\lvert u\rvert = \frac{1007}{sin \frac{1005\pi}{2014}}$	2p
obţine $\lvert v\rvert = 2 \cdot 2014 \left\lvert \left(\frac{1}{\varepsilon - 1} - \frac{2015}{4}\right)^2 - \left(\frac{2015}{4}\right)^2 \right\rvert$ şi determină $max\lvert v\rvert$ şi $\min\lvert v\rvert$	1p
total	**10p**

3. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie care verifică relaţia

$$x + y \leq 3^x f(x) + 3^y f(y) \leq (x + y)3^{x+y} \quad , (\forall) x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Arătaţi că funcţia f este unică şi determinaţi această funcţie.
b) Determinaţi $min(f(\mathbb{N}))$ şi $max(f(\mathbb{N}))$.

c) Arătaţi că $max(f(\mathbb{R})) = max(f([0,2])$.

Barem de corectare:

start	1p
pentru $x = y = 0$ obţine $0 \leq f(0) + f(0) \leq 0$, deci $f(0) = 0$	1p
pentru $y = -x$ obţine că $3^x f(x) + 3^{-x} f(-x) = 0$ (1)	1p
pentru $y = 0$ obţine inegalitatea $f(x) \geq x \cdot 3^{-x}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$	1p
folosind (1) pentru $-x$ obţine inegalitatea $f(x) \leq x \cdot 3^{-x}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$	
şi deduce că $f(x) = x \cdot 3^{-x}, (\forall) x \in \mathbb{R}$	1p
arată că $f(n) > f(n+1) > 0 = f(0), (\forall) n \in \mathbb{N}^*$	1p
deci $min(f(\mathbb{N})) = f(0) = 0$ şi $max(f(\mathbb{N})) = f(1) = \frac{1}{3}$	1p
observă că $f(x) < 0, (\forall) x < 0 = f(0)$, deci $max(f(\mathbb{R})) = max(f([0,\infty)))$	1p
arată că $f(x) \geq f(x+1), (\forall) x \geq \frac{1}{2}$ şi deduce că	
pentru orice $x \geq \frac{3}{2}$ există $x_0 \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ cu $f(x_0) \geq f(x)$	1p
de unde $max(f([0,\infty))) = max(f([0,\frac{3}{2}))) = max(f([0,2)))$	1p
total	**10p**

4. Determinaţi numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$3^{x^{22}} = 2014 - 28^{(1-x)^2}.$$

Barem de corectare:

start	1p
consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^{x^{22}}$, $g(x) = 2014 - 28^{(1-x)^2}$	1p
şi arată că f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ şi strict crescătoare pe $[0,\infty)$	1p
iar g este strict crescătoare pe $(-\infty, 1]$ şi strict descrescătoare pe $[1,\infty)$	1p
observă că $f(x) \in [1,3], (\forall) x \in [0,1]$ şi $g(x) \in [1986, 2013], (\forall) x \in [0,1]$	1p
astfel că ecuaţia $f(x) = g(x)$ nu are soluţii în $[0,1]$	1p
resp. are cel mult câte o soluţie în fiecare din intervalele $(-\infty, 0]$, resp. $[1,\infty)$	1p
deoarece $f(-1) = 3 > 0 > 2014 - 28^4 = g(-1)$ şi $f(0) = 1 < 1986 = g(0)$	
există o soluţie $x_1 \in (-1, 0)$	1p
deoarece $f(1) = 3 < 2013 = g(1)$ şi $f(2) = 3^{2^{22}} > 1986 = g(2)$	
există o soluţie $x_2 \in (1,2)$	1p
obţine că ecuaţia are exact două soluţii	1p
total	**10p**

Succes!

Inspectoratul Şcolar Judeţean Timiş

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul Interjudeţean de Matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXVIII-a
Timişoara, 21-23 martie 2014

clasa a XI-a

Problema 1.

Start .... **(1p)**

(a)

Observă $F(X + \lambda I_n, Y + \mu I_n) = F(X, Y)$, $(\forall) X, Y \in M_n(\mathbb{R})$, $(\forall)\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ..... **(2p)**

Deduce F neinjectivă .... **(1p)**

(b)

Din $M \in \mathrm{Im}(F) \Rightarrow (\exists) X, Y \in M_n(\mathbb{R})$ astfel încât $M = F(X, Y)$ .... **(1p)**

Dacă X şi Y sunt inversabile, problema este rezolvată. Dacă doar una dintre matricele X, Y este neinversabilă, aplică următorul procedeu (prezentat în cele ce urmează pentru cazul când ambele matrice X, Y sunt neinversabile) doar matricei neinversabile. Dacă X şi Y sunt ambele neinversabile, consideră polinoamele $P_X = \det(X + tI_n), P_Y = \det(Y + tI_n)$ şi remarcă faptul că mulţimile rădăcinilor acestora, $Z(P_X), Z(P_Y)$, sunt mulţimi finite. Astfel, pentru $\lambda \in \mathbb{R} \setminus Z(P_X)$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus Z(P_Y)$, obţine că $X + \lambda I_n$ şi $Y + \mu I_n$ sunt matrice inversabile .... **(3p)**

Alege $A = X + \lambda I_n$, $B = Y + \mu I_n$, cu $\lambda \in \mathbb{R} \setminus Z(P_X)$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus Z(P_Y)$ şi deduce $F(A, B) = F(X, Y)$.. **(1p)**

Finalizează.. **(1p)**

Variantă de barem pentru subpunctul **(a):**

Orice exemplu concret ce implică neinjectivitatea, e.g., pentru $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ cu $A \neq B$, avem $(A, A) \neq (B, B)$, dar $F(A, A) = F(B, B)$.................................. **(3p)**

Problema 2.

Start .... **(1p)**

Presupune că există o funcţie ce satisface ipotezele problemei. Arată că $(\exists) x_0 \in (0, \infty)$ astfel încât $f(x_0) = 0$. .... **(1p)**

Consideră $M \in [x_0, 2014 \cdot x_0]$, $M = \sup\{x \in [x_0, 2014 \cdot x_0] : f(x) = 0\}$. .... **(2p)**

Deduce $f(M) = 0$ şi $M < 2014 \cdot x_0$.. **(1p)**

Arată că pentru fiecare şir $(x_n)_{n \geq 0} \subset (0, \infty)$ cu $\lim_{n \to \infty} x_n = M$, $(\exists) N \in \mathbb{N}$ astfel încât $f(x_n) = 0$, $(\forall) n \geq N$ ($\spadesuit$).

În caz contrar, va exista un subşir $(x_{n_k})_{k\geq 0} \subseteq (x_n)_{n\geq 0}$ pentru care $f(x_{n_k}) \neq 0$, $(\forall)k \geq 0$, ceea ce ar implica din ipoteză că $f(2014 \cdot x_{n_k}) = 0$, $(\forall)k \geq 0$. Cum f este continuă, avem că $f(2014 \cdot M) = \lim_{k\to\infty} f(2014 \cdot x_{n_k}) = 0 \neq f(2014 \cdot M)$, absurd. . . . . **(2p)**

Din $M < 2014 \cdot x_0$ deduce că există $N_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $M + \dfrac{1}{N_0} < 2014 \cdot x_0$ şi în consecinţă, pentru fiecare $n \geq N_0$ avem $M + \dfrac{1}{n} < 2014 \cdot x_0$. Alegând pentru ficare $n \geq N_0$, câte un număr a_n astfel încât $M < a_n < M + \dfrac{1}{n}$ obţine un şir de numere strict pozitive convergent la M. . . . . **(2p)**

Deoarece $x_0 \leq M < a_n < M + \dfrac{1}{n} < 2014 \cdot x_0$, $(\forall)n \geq N_0$ şi $M = \sup\{x \in [x_0, 2014 \cdot x_0] : f(x) = 0\}$, obţine că $f(a_n) \neq 0$, $(\forall)n \geq N_0$, ceea ce contrazice ($\spadesuit$). Concluzionează că nu există funcţii ce satisfac ipotezele problemei. . . . . **(1p)**

Problema 3.

Start. . . . . **(1p)**

Scrie $\det(A - xBC^T)$ sub forma $\begin{vmatrix} a_{11} - xb_1c_1 & \dots & a_{1n} - xb_1c_n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} - xb_nc_1 & \dots & a_{nn} - xb_nc_n \end{vmatrix} =: \clubsuit$. . . . . **(1p)**

Foloseşte proprietăţile determinanţilor şi obţine

$$\clubsuit = \det A - x \left[\begin{vmatrix} b_1c_1 & \dots & b_1c_n \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ b_2c_1 & \dots & b_2c_n \\ a_{31} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{(n-1)1} & \dots & a_{(n-1)n} \\ b_nc_1 & \dots & b_nc_n \end{vmatrix} \right]$$

. . . . **(2p)**

Dezvoltă fiecare dintre determinanţii din sumă şi obţine

$\clubsuit = \det A - x \left(\sum_{j=1}^n b_1c_jA_{1j} + \sum_{j=1}^n b_2c_jA_{2j} + \dots + \sum_{j=1}^n b_nc_jA_{nj} \right)$. . . . . **(1p)**

Restrângând termenii obţine

$\clubsuit = \det A - x \sum_{i=1}^n b_i \left(\sum_{j=1}^n c_jA_{ij} \right)$. . . . . **(1p)**

Observă că egalitatea precedentă se poate rescrie sub forma

$\clubsuit = \det A - xC^T \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} B$. . . . . **(2p)**

Utilizând formula inversei obţine

$\clubsuit = \det A - xC^T \left(\det A \cdot A^{-1}\right) B = \det A \cdot \left(1 - xC^TA^{-1}B\right)$ şi finalizează. . . . . . . **(2p)**

Problema 4.

Start. . . . . **(1p)**

Notează $a_n + i \cdot \dfrac{b_n}{n} =: u_n$, $\overline{u_n} =: v_n$, $(\forall)n \geq 1$. . . . . **(2p)**

Obţine $u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot v_n^2$ şi $v_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot u_n^2$, $(\forall) n \geq 1$. . . . . **(2p)**

Deduce $u_{n+2} = \frac{1}{8} \cdot u_n^4$, $(\forall) n \geq 1$ şi în consecinţă $|u_{n+2}| = \frac{1}{8} \cdot |u_n|^4$, $(\forall) n \geq 1$. . . . **(1p)**

Studiază convergenţa subşirurilor $(|u_{2k}|)_{k\geq 1}$, $(|u_{2k+1}|)_{k\geq 0}$, obţine convergenţa şirului $(|u_n|)_{n\geq 1}$ şi deduce că $\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0$. . . . . **(2p)**

Observă

$|x_n|^2 = \left(\frac{a_n b_n}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{4}\left(a_n^2 - \frac{b_n^2}{n^2}\right)^2 + \left(\frac{a_n b_n}{n}\right)^2 = \left|\frac{1}{2} \cdot u_n^2\right|^2 = \frac{1}{4} |u_n|^4$, $(\forall) n \geq 1$. . **(1p)**

Folosind $\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0$, obţine $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ şi finalizează. . . . . **(1p)**

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Inspectoratul Şcolar
Judeţean Timiş

Concursul Interjudeţean de Matematică "Traian Lalescu", ediţia a XXVIII-a Timişoara, 21-23 martie 2014

Clasa a XII-a

Soluţii şi barem:

1.

Soluţie

Start **1p**

a) Fie $a, b \in G$, atunci $(aba^{-1})^k = b^k \Leftrightarrow ab^k a^{-1} = b^k \Leftrightarrow ab^k = b^k a \Leftrightarrow b^k \in Z(G), \forall\, b \in G$ **2p**

$b^3, b^{22} \in Z(G) \Rightarrow b = b^{22}(b^3)^{-7} \in Z(G), \forall b \in G \Rightarrow G = Z(G) \Rightarrow G$ abelian **2p**

b) Din egalităţile din enunţ rezultă: $x^{19} = y^{53} = z^2 = u$ **2p**

Fie $t = xyz$; din comutativitate obţinem $t^{1007} = x^{1007} \cdot y^{1007} \cdot z^{1007} = u \cdot u \cdot z \neq u$ **2p**

Deci $t \neq u$ şi $t^{2014} = (t^{1007})^2 = z^2 = u$ **1p**

2.

Soluţie

Start **1p**

a) În integrala $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ facem substituţia $x = \sin\theta$ şi apoi $x = \cos\theta$, de unde rezultă $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\theta)\cos\theta d\theta$, respectiv $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos\theta)\sin\theta d\theta$ **2p**

Adunând cele două relaţii obţinem : $2I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(\sin\theta)\cos\theta + f(\cos\theta)\sin\theta] d\theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ **2p**

Rezultă $I \leqslant \dfrac{\pi}{4}$ **1p**

b) $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1-x^2}$ **2p**

f satisface condiţiile din enunţ şi $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{\pi}{4}$ **2p**

3.

Soluţie

Start **1p**

Avem $\dfrac{f^{(n)}(x)}{n+x+C} = g(x) \Rightarrow f^{(n)}(x) = (n+x+C)g(x)$ **2p**

Derivând: $f^{(n+1)}(x) = (n+x+C)g'(x) + g(x) = (n+1+x+C)g(x)$. Obţinem $g'(x) = g(x)$ **2p**

Rezultă $g(x) = ae^x \Rightarrow f'(x) = a(x + C + 1)e^x$ **1p**

Din condiţia $f'(0) = 1$ deducem : $a = \dfrac{1}{C+1}$ **1p**

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x+C}{C+1} \cdot e^x\,dx = C + e - 2$ **2p**

$C^2 = 3 - e \Rightarrow C = \sqrt{3-e}$ **1p**

4.

Soluţie

Start **1p**

Centrul $Z(R)$ este subinel al inelului R, rezultă că:

$xy+yx = (x+y)^2-x^2-y^2 = (x+y)^2-f(x+y)+f(x)+f(y)-x^2-y^2 = ((x+y)^2 - f(x+y))-$
$(x^2 - f(x)) - (y^2 - f(y)) \in Z(R)$ **3p**

Rezultă : $x(xy + yx) = (xy + yx)x$, $\forall x, y \in R \Leftrightarrow$ **1p**

$x^2y + xyx = xyx + yx^2 \Rightarrow x^2y = yx^2$, $\forall x, y \in R \Leftrightarrow x^2 \in Z(R), \forall x \in R$ **2p**

Cum $x^2 - f(x) \in Z(R) \Rightarrow f(x) = x^2 - (x^2 - f(x)) \in Z(R)$ **2p**

$R = \operatorname{Im} f \subseteq Z(R)$, rezultă inelul R este comutativ **1p**